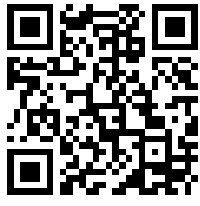
This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Princeton University Library
32101 062251127

SK
8280
731

Library of

Princeton University.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

ULP
D 1671

ANALOGIES MÉCANIQUES

DE

L'ÉLECTRICITÉ

Digitized by Google

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
Quai des Grands-Augustins, 55.
65493

Digitized by Google

BIBLIOTHÈQUE DES ANNALES DES POSTES, TÉLÉGRAPHES ET TÉLÉPHONES

ANALOGIES MÉCANIQUES

DE

L'ÉLECTRICITÉ

PAR

J.-B. POMEY

INGÉNIEUR EN CHEF DES TÉLÉGRAPHES

Conférences faites à l'École Supérieure d'Électricité

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1921

Digitized by Google

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés
pour tous pays.

Digitized by Google

SOMMAIRE.

Il y a entre la mécanique et l'électricité des rapports et des analogies. Je me propose d'examiner les uns et les autres d'une façon sommaire.

Les rapports résultent de cette idée due à Maxwell, que les équations de la mécanique relatives aux systèmes à liaisons doivent s'appliquer au mécanisme caché qui fait réagir les courants les uns sur les autres, conformément aux lois de l'induction de Faraday. Cette conception ferait rentrer l'électricité dans le domaine de la mécanique et elle y a réussi pour un grand nombre de phénomènes.

Les analogies sont de deux sortes : d'une part, dans toutes les théories de la physique on rencontre des quantités qui ont la même forme algébrique ; on peut alors établir une comparaison entre elles. C'est ainsi que la densité e de la quantité d'électricité en un point donné est

$$e = \operatorname{div}\overline{D},$$

$\overline{D}$ étant le déplacement électrique de Maxwell, et, dans la déformation des milieux continus, si le vecteur vitesse en un point est $\overline{V}$ et si ρ est la densité d'un élément, ρ' sa dérivée par rapport au temps, quand on suit l'élément, on a

$$\operatorname{div}\overline{V} = -\frac{\rho'}{\rho}.$$

On peut donc établir une comparaison simple entre les deux ordres de phénomènes en faisant correspondre $\overline{V}$ à $\overline{D}$ et e à $\frac{-\rho'}{\rho}$.

D'autre part, on peut transposer certains théorèmes d'une théorie dans l'autre.

Par exemple, considérons le théorème de Castigliano dans la théorie de l'élasticité (Lecornu, *Cours de Mécanique*, t. III, p. 102).

Si l'on appelle :

DEC 19 1924

564569

Digitized by Google

U le potentiel interne,

X, Y, Z les composantes des forces qui sont appliquées progressivement en divers points d'un corps solide,

u, v, w les composantes de déplacements de ces points,

on a (admettons-le)

$$2\,U = \Sigma(X\,u + Y\,v + Z\,w),$$

ce qu'on peut écrire

$$2\,U = \Sigma F\,a,$$

en désignant par a, la projection sur la force F du déplacement total de son point d'application.

On tire de là, en différentiant :

$$2\,dU = \Sigma F\,da + \Sigma a\,dF.$$

D'autre part, du moment que l'équilibre se maintient, nous avons nécessairement

$$dU = \Sigma F\,da.$$

En retranchant de l'équation précédente, il vient

$$dU = \Sigma a\,dF.$$

D'après cela :

« La dérivée du potentiel interne par rapport à chacune des forces appliquées au solide est égale à la projection, sur la direction de cette force, du déplacement total éprouvé, à partir de l'état naturel, sur sa direction. »

C'est le théorème de Castigliano.

De même, en électricité, si l'on appelle :

U l'énergie potentielle d'un système de corps conducteurs en présence,

V le potentiel de chaque conducteur,

Q sa charge;

Si l'on a élevé progressivement les potentiels de zéro à leurs valeurs actuelles, on a

$$2\,U = \Sigma VQ,$$

d'où

$$2\,dU = \Sigma V\,dQ + \Sigma Q\,dV.$$

Mais, puisque l'équilibre subsiste, on a

$$dU = \Sigma V\,dQ,$$

Digitized by Google

d'où

$$dU = \Sigma Q\, dV.$$

On effectue ainsi une transposition d'une théorie à l'autre.

Enfin, on peut se contenter de chercher des imitations. C'est ainsi que Bjerknes a construit un modèle hydrodynamique donnant l'image de l'attraction des petites sphères électrisées de la balance de Coulomb. Il plonge dans un liquide deux petites sphères de caoutchouc gonflées par de l'air dont la pression oscille périodiquement autour d'une valeur déterminée. On peut faire varier la différence de phase des variations périodiques de pression des deux sphères. On observe une attraction ou une répulsion en raison inverse du carré de la distance, l'attraction correspondant au cas où la différence de phase est nulle, la répulsion correspondant au cas où la différence de phase est égale à π.

Aujourd'hui, le problème que l'on se pose n'est plus de faire rentrer l'électricité dans le domaine de la mécanique, mais de rechercher si la mécanique ne doit pas être modifiée de façon à passer avec l'électricité dans une théorie plus générale des connaissances scientifiques, dont les principes s'appliqueraient également à l'une et à l'autre discipline.

Il y a, dans le choix des sujets à traiter, une grande part d'arbitraire; je ne me suis pas laissé guider seulement par le souci de donner une vue systématique des analogies mécaniques de l'électricité, mais j'ai cherché des sujets qui puissent être d'un intérêt plus particulier pour ceux qui s'occupent de télégraphie sans fil; or, pour ceux-là, le problème des oscillations est fondamental. J'ai cherché, en outre, à aborder le problème de l'entretien. Comme je ne suis pas au courant du nombre considérable de travaux qui ont été faits sur ce sujet, je citerai, seulement, les noms de MM. Gutton et Blondel, parce que j'ai profité de leurs idées et mis à profit leurs articles de la *R. G. E.*

Je vais, maintenant, résumer sommairement les matières que j'ai traitées.

CHAPITRE I.

THÉORIE DE MAXWELL.

Le premier essai pour donner une interprétation mécanique des phénomènes électriques est dû à Maxwell. Sa théorie du déplacement

Digitized by Google

électrique continue encore à fournir une image commode, faisant tomber sous nos sens des phénomènes qui, autrement, leur échappent. On ne peut pas avoir une notion directe de l'induction électrostatique, car ce n'est pas un phénomène qui puisse être perçu comme un mouvement par la vue ou comme une différence de température par le toucher. Il est donc fort utile de le concevoir par un effort d'imagination, comme un déplacement de quelque chose. (Traité de Maxwell, § 59, 60, 61, 62.)

Pour Maxwell, ce quelque chose était l'électricité même. Aujourd'hui, l'électricité a pris une signification beaucoup plus matérielle; l'électricité, c'est la concentration de la force électrique autour des électrons et des ions.

Or, il y a déplacement électrique même dans le vide. Le déplacement n'est donc pas le déplacement de l'électricité. On peut le concevoir comme un déplacement de l'éther. On peut aussi se le donner comme une notion première ou comme un postulatum.

Le déplacement a pour expression

$$\frac{k\overline{\mathrm{E}}}{4\pi},$$

$\overline{\mathrm{E}}$ étant l'intensité du champ électrique (Maxwell, § 68).

Dans un milieu qui n'est pas isotrope, k est remplacé par une fonction vectorielle linéaire autoconjuguée. On peut dire que k est alors un tenseur symétrique du second degré. J'indique comment il se transforme quand on passe d'un système de coordonnées rectangulaires à un autre (Maxwell, § 101 *e*).

Je cherche ensuite l'expression de l'énergie électrostatique par unité de volume, quand on suppose, avec Maxwell, que cette énergie est localisée dans le milieu diélectrique (Maxwell, § 101 *f*).

La quantité d'électricité est définie par le flux du déplacement; c'est un invariant (Maxwell, § 101 *c*).

Enfin, il y a un potentiel dans le champ électrostatique; l'intensité du champ dérive d'une fonction de forces.

Maxwell définit le courant électrique par l'intégrale de ligne de la force magnétique (Maxwell, § 481, 482).

Il en résulte que le flux du vecteur courant à travers une surface fermée est nulle, d'où la justification du mot *courant*.

Pour que cette propriété subsiste dans le cas de circuits coupés

Digitized by Google

par des condensateurs, il faut, au courant de conduction, adjoindre le courant de déplacement (Maxwell, § 610).

La loi d'Ohm définit la conductibilité, qui est un tenseur symétrique du second degré (Maxwell, § 609).

Le champ électrique et le champ magnétique sont représentés par deux vecteurs, mais on distingue deux sortes de vecteurs, les vecteurs axiaux et les vecteurs polaires ; les vecteurs axiaux ont la symétrie du cylindre tournant, les vecteurs polaires ont la symétrie d'une flèche. Le champ magnétique est-il un vecteur polaire ou un vecteur axial? Cette question paraît avoir été soulevée par Curie pour la première fois. Un anneau est coupé par un condensateur, celui-ci se décharge, le système est symétrique par rapport à un plan contenant le cercle moyen de l'anneau. Or, au centre, le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan. Mais la symétrie des causes doit se retrouver dans les effets. Donc, le champ magnétique est symétrique par rapport au plan moyen de l'anneau. Il doit donc être un vecteur axial.

Une autre preuve est donnée par le phénomène de Hall (Léon Bloch, *Précis d'électricité théorique*, § 88).

Le courant ayant son intensité représentée par un rotationnel, il y a intérêt à rechercher quelle est la signification du rotationnel dans la déformation des milieux continus.

La quantité d'électricité ayant sa densité représentée par une divergence, il y a intérêt à rechercher aussi quelle est la signification de la divergence, notamment quand il y a un potentiel.

Le rotationnel est proportionnel au vecteur tourbillon (vecteur axial).

La divergence est proportionnelle à l'écart entre la valeur du potentiel au centre d'une petite sphère et sa valeur moyenne pour tous les points de cette sphère.

C'est dans la théorie de l'induction électromagnétique que Maxwell a appliqué à l'électricité les équations des systèmes à liaisons. Je reproduis sommairement cette théorie (Maxwell, § 578, ..., § 585, ...).

Elle conduit aux équations du champ électromagnétique (Maxwell, § 607 et suiv.).

Elle donne également l'expression de l'énergie magnétique, celle-ci étant supposée répartie dans le milieu (Maxwell, § 635).

Digitized by Google

Tout ce qui précède est, en somme, un aperçu de la théorie de Maxwell. Cette théorie se base sur les expériences de Faraday. Mais la façon dont elle est présentée par Maxwell la fait découler de l'application des principes de la mécanique à un mécanisme, dans lequel l'énergie potentielle est figurée par l'énergie élastique due au déplacement et l'énergie cinétique par la force vive de quelque mécanisme caché; les vitesses de celui-ci se traduisent par les intensités des courants, seules accessibles à nos moyens de mesure, de même que les déplacements se traduisent par les charges des corps conducteurs ; les déplacements ne dépendent que des charges, seules variables, qui puissent être déterminées expérimentalement.

CHAPITRE II.

APPLICATION DU PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

On peut donc, d'après cette conception de Maxwell, à la fois représentation et hypothèse, appliquer le principe des vitesses virtuelles à un système de courants. On a ainsi un moyen, qui parle à l'esprit, d'écrire les équations de l'électricité, ces équations seront alors considérées comme les équations du mouvement.

Les équations de Kirchhoff peuvent être interprétées de la même façon.

Mais, dans ce dernier cas, on a affaire à un système d'équations linéaires, qui a la plus grande analogie avec celles qu'on obtient en mécanique dans la théorie des percussions.

Plusieurs théorèmes peuvent être transposés de la théorie du choc à celle des courants.

La quantité de mouvement est alors l'analogue du flux magnétique. Il est intéressant de rechercher l'énergie perdue dans le choc qui provient de l'ouverture d'un interrupteur.

On peut de même chercher les variations de la chaleur dégagée suivant la loi de Joule. On arrive ainsi à un théorème qui complète le théorème bien connu de Thévenin sur le courant permanent qui circule dans une branche AB dont on ferme l'interrupteur, quand on connaît la différence de potentiel aux bornes, la résistance de la branche nouvelle et la résistance intérieure du réseau, c'est-à-dire la résistance composée mesurée entre les points A et B, toutes forces

Digitized by Google

électromotrices étant écartées et remplacées par des résistances équivalentes à leurs résistances propres.

CHAPITRE III.

ANALOGIE HYDRODYNAMIQUE.

Je traite ensuite le problème des sphères pulsantes de Bjerknes.

CHAPITRE IV.

PETITES OSCILLATIONS.

J'aborde alors la théorie des oscillations électriques ; elle est identique à celle des oscillations d'un système à liaisons autour d'une position d'équilibre stable. J'énonce les principales propriétés des petites oscillations et quelques théorèmes bien connus de mécanique qui peuvent utilement être invoqués par les électriciens. Il y a avantage, dans bien des cas, à recourir aux coordonnées normales.

Les équations ne restent valables que si les fils conducteurs ont un diamètre négligeable et si les intensités ne deviennent pas trop considérables, car les coefficients cesseraient d'être constants.

Il est à noter que souvent il y a, en électricité, des coordonnées ignorables ; ce cas se rencontre aussi en mécanique dans les problèmes d'équilibre relatif, comme celui d'un liquide en équilibre dans un récipient cylindrique qui tourne autour de son axe.

Je traite le cas des oscillations d'un système non conservatif à deux degrés de liberté, en coordonnées normales.

J'examine, en général, la modification qu'apporte au mouvement l'existence d'une fonction de dissipation de l'énergie, quand celle-ci a des coefficients petits.

Ces dernières considérations sont extraites de la théorie du son de Lord Rayleigh. J'indique le caractère stationnaire des périodes de vibration correspondant aux coordonnées normales.

Les mouvements périodiques qui ont été examinés jusqu'ici sont ceux du système autour d'une position d'équilibre.

On peut se proposer de rechercher les régimes périodiques stables.

Un exemple est fourni par le bélier hydraulique.

Je décris l'appareil perfectionné de Bollée. Il y a analogie entre le coup de bélier et l'étincelle d'extra-courant.

Digitized by Google

L'emploi de coordonnées normales permet de considérer un système de deux circuits oscillants, qui sont accouplés par le fait d'avoir une résistance commune, comme l'image de deux circuits oscillants donnés qui seraient accouplés par induction.

CHAPITRE V.

OSCILLATION DE L'ANTENNE.

J'insiste sur l'analogie des vibrations électriques de l'antenne avec celles d'une corde sonore.

On obtient, d'ailleurs, une équation tout à fait analogue pour les oscillations d'un fluide incompressible contenu dans une conduite, qu'on suppose élastique, au moment d'un coup de bélier. Ce problème est traité complètement. On en déduit la vitesse de propagation de l'onde de pression.

CHAPITRE VI.

LA LAMPE GÉNÉRATRICE D'OSCILLATIONS.

Les équations de l'élasticité établies dans le problème précédent sont des relations entre les déformations et les forces élastiques; elles ont la même forme que les relations qui existent entre les charges et les potentiels des corps conducteurs mis en présence les uns des autres au sein d'un diélectrique.

Un pareil état du champ peut être défini soit par les potentiels, soit par les charges, et l'on a là un exemple d'un système qui est défini à volonté par deux espèces de coordonnées, les V ou les Q qui se transforment par des substitutions inverses si l'on s'impose la condition que

$$\frac{1}{2}\Sigma VQ$$

reste invariable. Ces considérations permettent de se fixer les idées, dans l'étude des composantes covariantes ou contrevariantes des tenseurs.

Ces deux modes de définition correspondent au cas de systèmes conservatifs ou de systèmes reliés à des sources d'énergie.

Les forces de réaction interne sont les mêmes dans les deux cas, car elles ne dépendent que de l'état actuel du système, mais les varia-

Digitized by Google

tions d'énergie sont bien différentes; on ne peut sans danger, à ce point de vue, assimiler les courants et les feuillets.

Équation caractéristique.

J'examine comment on peut se rendre compte de l'équation caractéristique de la lampe à trois électrodes, en supposant que le flux d'électrons soit très peu dense.

La lampe peut être employée en combinaison avec des circuits oscillants pour engendrer des oscillations.

Analogie de l'horloge.

Un exemple d'entretien d'oscillations est celui de l'horloge Féry-Brillié dont je donne la description et la théorie.

Régime oscillatoire.
Cas d'une équation caractéristique du second degré.

Pour avoir la période des oscillations entretenues dans un circuit oscillant, quand on emploie une lampe à trois électrodes, je cherche d'abord le mouvement oscillatoire engendré par l'application à la grille de la force électromotrice d'un alternateur. Si la composante oscillatoire du courant de plaque est en quadrature avec la force électromotrice de l'alternateur pour une valeur convenable de la période de celui-ci, on conçoit la possibilité de remplacer l'alternateur par une bobine d'entretien soumise à l'induction du courant de plaque lui-même, pourvu que la liaison de la bobine d'entretien soit faite dans le sens convenable. J'obtiens ainsi la période propre des oscillations possibles : de l'énergie est dissipée sous forme de chaleur dans le circuit oscillant, mais, en revanche, une quantité d'énergie égale cesse d'être absorbée dans la lampe et la pile fournit toujours le même travail.

Les conditions initiales seules fixent l'amplitude des oscillations.

Étude algébrique des racines de l'équation caractéristique.

Pour que les oscillations puissent grandir, il faut que les racines de l'équation caractéristique aient leur partie réelle positive, ce qui correspond à un exposant d'amortissement négatif.

Digitized by Google

J'examine pour une équation du troisième degré la condition pour que les trois racines soient à partie réelle positive en appliquant *les principes de Cauchy*.

Je traite le problème des oscillations non amorties dans le cas d'un circuit conduisant à une équation caractéristique du troisième degré, en recherchant toujours la valeur à donner à la pulsation d'un alternateur dont la force électromotrice serait appliquée à la grille, pour que le courant oscillatoire de plaque soit en quadrature avec elle. On trouve deux valeurs de cette pulsation et le régime d'entretien n'est possible que si la pulsation est entre ces deux valeurs. J'examine ce que devient la troisième racine réelle quand la pulsation a une des deux valeurs critiques.

Calcul de l'amplitude.

Enfin, supposant que l'équation caractéristique de la lampe à trois électrodes perde son caractère linéaire, et me plaçant dans le cas le plus simple où l'équation caractéristique n'est que du second degré, je cherche à déterminer la pulsation et l'amplitude du terme fondamental.

Restrictions imposées aux analogies.

Si l'électricité et la mécanique sont régies dans bien des cas par des équations analogues, peut-on trouver des phénomènes électriques une explication mécanique adéquate. Cela n'est pas possible quand on tient compte du rayonnement, parce que les équations du champ électromagnétique n'admettent pas le même groupe de transformation que les équations de la mécanique; dans le cas où il n'y a pas de rayonnement, on peut trouver des modèles exacts; j'en donne un exemple; ce sont deux disques rappelés par des spirales, entre lesquels roule une molette qui les actionne par la tranche; on a ainsi une imitation des phénomènes d'induction électromagnétique entre deux circuits.

Digitized by Google

ANALOGIES MÉCANIQUES

DE

L'ÉLECTRICITÉ

INTRODUCTION.

Dans l'Introduction qu'il a placée en tête de son Livre intitulé : *Électricité et Optique*, Poincaré raconte qu'un des savants français qui ont le plus approfondi l'œuvre de Maxwell lui disait un jour : « Je comprends tout dans son Livre, excepté ce que c'est qu'une boule électrisée. » Aussi avait-il cru devoir insister longuement sur cette partie de la Science.

Il est certain que Maxwell a surtout fait ressortir la notion de champ, telle qu'elle se présentait dans les travaux de Faraday et que la notion d'électricité était alors secondaire. Le succès de la théorie de Maxwell a été éclatant, dans le problème de la propagation des oscillations électriques, puisqu'il en est résulté une nouvelle théorie de la lumière, la théorie électromagnétique, qui était destinée à se substituer à la conception de Fresnel.

Dans les années subséquentes, la notion de champ a été de plus en plus considérée comme primordiale et elle a acquis dans les travaux de Vaschy le maximum de netteté mathématique.

Mais une grande transformation est survenue; Lorentz a introduit les ions comme une réalité physique, que le phénomène de Zeeman venait confirmer. Les phénomènes d'ionisation étaient approfondis et enfin les expériences de Michelson permettaient de suivre individuellement les électrons et de mesurer leur charge, toujours multiple exact de la même charge élémentaire.

Il y avait donc deux problèmes : celui de la transmission des forces électromagnétiques et celui de l'origine et de la production de ces forces; tandis que le premier occupait la pensée de Maxwell, le

Digitized by Google

second passait peu à peu au premier plan, avec la théorie de Lorentz et les expériences de J.-J. Thomson et de son école.

Cette nouvelle orientation a fait pénétrer profondément dans la constitution des molécules et des atomes ; on ne cherche plus de modèle mécanique susceptible de représenter les phénomènes électriques, l'ambition est plus haute, on prétend atteindre la réalité elle-même et connaître, dans ses traits généraux, la structure même des molécules et des atomes.

Je ne suis entré dans ces considérations que pour éviter toute méprise. Je désire, en effet, exposer seulement ici certaines analogies mécaniques des phénomènes électriques. Mon but n'est donc pas du tout de décrire ces découvertes récentes, si importantes soient-elles, il est beaucoup plus modeste. Si restreint que soit le domaine que je désire explorer, je pense qu'il pourra présenter cependant quelques points de vue intéressants.

Digitized by Google

CHAPITRE I.

THÉORIE DE MAXWELL.

Théorie du déplacement électrique.

Je reviens donc à l'œuvre de Maxwell. Les équations de la propagation des ondes hertziennes reposent sur la théorie de ce savant. Il importe donc de dire un mot de ses conceptions et en particulier de sa théorie du déplacement électrique.

Nous pouvons, dit-il, concevoir la relation physique entre corps électrisés soit comme le résultat de l'état du milieu interposé, soit comme le résultat d'une action directe à distance. Si nous adoptons la conception d'une action à travers le milieu, nous sommes conduits à rechercher la nature de l'action en chaque point du milieu.

La doctrine de Maxwell sera suffisamment exposée par les propositions ci-après que j'emprunte à son Traité en les traduisant textuellement.

En chaque point du milieu, il y a à distinguer entre l'intensité électromotrice en un point et la polarisation électrique du milieu en ce point, ces quantités dirigées, fonctions l'une de l'autre, n'étant pas, dans les substances solides, dans la même direction.

L'expression la plus générale de l'énergie électrique du milieu par unité de volume est le demi-produit de l'intensité électromotrice et de la polarisation électrique multiplié par le cosinus de l'angle compris entre leurs directions.

Faraday a montré que l'effort subi par le milieu est une tension le long des lignes de forces combinée avec une pression égale dans toutes les directions à angle droit avec ces lignes. La grandeur de l'effort est proportionnelle à l'énergie de l'électrification par unité de volume.

Une portion élémentaire d'un corps est dite polarisée si elle acquiert des propriétés égales et opposées sur les deux côtés opposés. L'idée

Digitized by Google

d'une polarité interne peut être étudiée avec avantage sur l'exemple des aimants permanents. De même, le diélectrique polarisé est mis dans un état forcé par l'action de la force électromotrice, état qui disparaît avec la force. Nous le considérons comme un petit déplacement électrique, produit par l'intensité électrique et qui lui serait proportionnel, si le milieu n'est pas conducteur. La grandeur du déplacement est mesurée par la quantité d'électricité qui traverse l'unité d'aire, quand le déplacement croît de zéro à sa valeur actuelle. Il mesure donc la polarisation.

L'analogie entre l'action de la force électromotrice pour produire le déplacement électrique et celle de la force mécanique ordinaire pour produire le déplacement d'un corps élastique est si évidente que « je me suis risqué, dit Maxwell, à appeler le rapport de l'intensité électromotrice au déplacement électrique correspondant *le coefficient d'élasticité électrique du milieu*. Ce coefficient est différent dans les différents milieux et varie en raison inverse de la capacité inductive spécifique de chaque milieu ».

Les variations du déplacement électrique constituent évidemment le courant électrique. Ces courants, cependant, ne peuvent exister que pendant la variation du déplacement et par conséquent, puisque le déplacement ne peut pas excéder une certaine valeur sans causer la décharge disruptive, ils ne peuvent continuer indéfiniment dans la même direction, comme les courants à travers les conducteurs.

La tourmaline donne l'exemple d'un corps où l'état de polarisation existe naturellement, sans exiger l'action d'une force électromotrice pour le produire.

Considérons une sphère uniformément chargée et soit E le déplacement électrique total à travers une surface sphérique concentrique de rayon r. Si h est la force électrique, on a

$$E : 4\pi r^2 h.$$

Mais

$$h = \frac{e}{r^2};$$

d'où

$$E : e$$

(: signe de proportionnalité). Pour déterminer le rapport, cherchons le travail effectué sur le milieu, entre deux surfaces sphériques, lorsque le déplacement électrique s'accroît de E à $E + \delta E$. Si V_1 et V_2

Digitized by Google

sont les potentiels des surfaces intérieure et extérieure, la force électromotrice qui produit le déplacement est $V_2 - V_1$ et le travail nécessaire pour produire le déplacement est $(V_2 - V_1)\delta E$. Si la surface intérieure se réduit à la surface de la sphère chargée et si la surface extérieure s'éloigne à l'infini, il reste $V\,\delta E$, V étant le potentiel de la sphère, donc le travail total effectué sur le milieu est $V\,\delta E$. Mais $V\,\delta e$ est, d'après la théorie ordinaire du potentiel, le travail nécessaire pour augmenter la charge de δe; or ce travail est, nous le supposons, dépensé dans le milieu; nous avons donc

$$\delta E = \delta e$$

et, par suite,

$$E = e$$

puisque E et e s'annulent en même temps.

Pour fixer nos idées sur le déplacement électrique, considérons un condensateur à plateaux parallèles A et B, séparés par un diélectrique C. Soit W le fil qui réunit A et B et supposons que par l'action d'une force électromotrice une quantité Q d'électricité positive est transportée le long du fil de B à A. L'électrification positive de A e l'électrification négative de B produiront une certaine force électromotrice agissant de A vers B dans la couche diélectrique et elle produira un déplacement de A vers B à travers le diélectrique. La valeur de ce déplacement, mesurée par la quantité d'électricité qui est contrainte à traverser une section fictive du diélectrique, divisant celui-ci en deux couches, sera, conformément à cette théorie, égale à Q.

Il est donc clair que, en même temps qu'une quantité Q d'électricité est transportée le long du fil par la force électromotrice de B en A, de façon à traverser chaque section du fil, la même quantité d'électricité traverse une section quelconque du diélectrique entre A et B par le fait du déplacement électrique.

Des phénomènes analogues se produisent pendant la décharge.

Tout cas de charge ou de décharge peut donc être considéré comme un mouvement dans un circuit fermé, tel que dans toute section du circuit la même quantité d'électricité passe dans le même temps, et ceci dans le cas non seulement d'un circuit voltaïque où le fait a toujours été admis, mais aussi dans les cas où l'électricité a été généralement supposée s'accumuler en certaines places.

Nous sommes ainsi conduits à une conséquence vraiment remar-

Digitized by Google

quable de la théorie que nous examinons, c'est que les mouvements de l'électricité sont pareils à ceux d'un fluide incompressible, de sorte que la quantité totale qui est contenue dans une certaine surface fictive fermée demeure toujours la même. Ce résultat paraît à première vue en contradiction avec le fait qu'on peut charger un conducteur et l'introduire dans un espace clos et modifier ainsi la quantité d'électricité à l'intérieur de ce volume. Mais il faut se rappeler que les anciennes théories ne tiennent pas compte du déplacement électrique dans la substance du diélectrique et confinent leur attention à l'électricité située sur la surface de séparation du conducteur et des diélectriques.

La théorie du déplacement de Maxwell présente cependant quelques obscurités : par exemple, si le déplacement électrique est celui de l'électricité contenue dans le diélectrique; imaginons une sphère chargée positivement, cette charge positive, si l'on admet que son origine doive être cherchée dans la polarisation du diélectrique, devra nous faire supposer que la polarisation du diélectrique s'effectue en sens contraire du déplacement et nous tombons dans une contradiction. Celle-ci disparaîtra si nous supposons que cette charge est due à l'électricité qui est contenue à l'intérieur du conducteur. On peut alors distinguer, comme l'a fait Poincaré, la quantité d'électricité vraie, qui se révèle à la surface du conducteur et le *fluide inducteur fictif* dont le déplacement produit la polarisation. Toutes les fois que Maxwell parle du déplacement électrique, il faudrait entendre le déplacement du fluide inducteur et alors l'électricité vraie et le fluide inducteur se comporteraient comme deux fluides incompressibles dont l'un chasse l'autre. Le fluide inducteur est d'ailleurs une conception qui n'est pas nécessaire. Dans la théorie de Lorentz, on interprète l'idée de Maxwell en supposant que le déplacement mesure un état de contrainte de l'éther. Il est inutile d'ajouter à la conception de l'éther celle d'un nouveau fluide.

Expression analytique de la théorie du déplacement.

Précisons maintenant les traits de cette théorie.

L'énergie électrique réside dans le milieu diélectrique.

Elle y est sous la forme d'un état de contrainte appelé *polarisation*

Digitized by Google

dont la valeur dépend de l'intensité résultante du champ électrique; en ce point, Maxwell appelle cette force électromotrice l'*intensité*, mais l'usage est de réserver le nom de *force électromotrice* à la partie de l'intensité électrique qui est produite par une modification locale thermique ou chimique ou par la variation instantanée en ce point de la quantité de mouvement électromagnétique.

Soient $\overline{D}$ le déplacement, $\overline{E}$ l'intensité du champ, K une fonction vectorielle linéaire; on a

$$\overline{D} = \frac{K\overline{E}}{4\pi} \tag{1}$$

ou encore, les indices indiquant les composantes suivant trois axes rectangulaires ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$),

$$4\pi D_i = \sum_j K_i^j E_j. \tag{2}$$

Dans un milieu homogène, K est une quantité scalaire; dans la formule (1), la quantité K est le pouvoir inducteur électrique. Dans le vide, K prend la valeur K_0 qui convient à l'éther. Dans le système électromagnétique, on a

$$K = \frac{1}{V^2},$$

V étant la vitesse de la lumière. Le déplacement a toujours alors une valeur numérique très petite, V étant très grand.

Remarques sur les changements des coordonnées.

Proposons-nous de savoir ce que deviennent les coefficients K de la formule (2) lorsqu'on effectue une transformation de coordonnées cartésiennes, en supposant que le trièdre trirectangulaire des axes prenne une nouvelle position. Pour la symétrie, au lieu de désigner les axes par Ox, Oy, Oz, comme on fait d'ordinaire, nous les appellerons 1, 2 et 3, de sorte que les trois coordonnées de l'extrémité d'un vecteur x seront x_1, x_2, x_3, ou d'une façon générale x_i, l'indice i étant susceptible de prendre les valeurs 1, 2, 3. Rapporté aux nouveaux axes, le vecteur x aura pour composantes x'_1, x'_2, x'_3, ou d'une façon générale x'_j, avec l'indice j susceptible de prendre les valeurs 1

Digitized by Google

2, 3. Les formules de transformation sont des formules linéaires et l'on posera

$$x'_j = \sum_i \alpha'_i x_i. \tag{1}$$

Comme la somme porte sur l'indice i qui est répété deux fois, nous écrirons simplement

$$x'_j = \alpha'_i x_i, \tag{2}$$

en sous-entendant le symbole $\sum_i$ grâce à cette convention que toutes les fois que dans le cours de nos calculs un indice sera répété deux fois dans un monome, nous ferons la somme de tous les monomes qu'on obtient en remplaçant l'indice répété, successivement par toutes les valeurs, qu'il est susceptible de prendre et qui sont ici 1, 2, 3.

Les systèmes de référence étant trirectangulaires, nous avons

$$\sum_j x'^2_j = \sum_i x_i^2 \quad \text{ou} \quad \sum_j x'_j x'_j = \sum_i x_i x_i, \tag{3}$$

ou plus simplement, d'après notre convention,

$$x'_j x'_j = x_i x_i. \tag{4}$$

Remarquons que les formules (2) peuvent s'écrire aussi

$$x'_j = \alpha'_l x_l \tag{2 bis}$$

parce que l'indice l devra, comme l'indice i dans l'équation (2), prendre successivement les valeurs 1, 2, 3 avant sommation.

C'est ainsi que, dans le calcul intégral, la variable de sommation peut être désignée par une lettre choisie à volonté.

Alors la formule (4) devient

$$\sum_j \alpha'_l x_l \sum_l \alpha'_l x_l = \sum_{j,l} \alpha'_l \alpha'_l x_i x_l. \tag{5}$$

Ce qui, plus simplement, peut, d'après notre convention, s'écrire

$$x'_j x'_j = \alpha'_i x_i \alpha'_l x_l = \alpha'_i \alpha'_l x_i x_l \tag{6}$$

Digitized by Google

ou, en développant la double sommation,

$$
\begin{aligned}
(7)\qquad x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = \;& x_1^2[(\alpha_1^1)^2 + (\alpha_1^2)^2 + (\alpha_1^3)^2 \\
&+ x_2^2[(\alpha_2^1)^2 + (\alpha_2^2)^2 + (\alpha_2^3)^2 \\
&+ x_3^2[(\alpha_3^1)^2 + (\alpha_3^2)^2 + (\alpha_3^3)^2] \\
&+ 2x_1x_2(\alpha_1^1\alpha_2^1 + \alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1^3\alpha_2^3) \\
&+ 2x_1x_3(\alpha_1^1\alpha_3^1 + \alpha_1^2\alpha_3^2 + \alpha_1^3\alpha_3^3) \\
&+ 2x_2x_3(\alpha_2^1\alpha_3^1 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_2^3\alpha_3^3).
\end{aligned}
$$

Par identification avec $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, on obtient les relations connues que nous pouvons écrire

$$
(8)\qquad \sum_j \alpha_i^j \alpha_l^j = \delta_{il} = \begin{cases} 1 \text{ pour } i = l, \\ 0 \text{ pour } i \neq l \end{cases}
$$

ou, plus simplement, d'après la convention adoptée,

$$
(9)\qquad \alpha_i^j \alpha_l^j = \delta_{il} = \begin{cases} 1 \text{ pour } i = l, \\ 0 \text{ pour } i \neq l. \end{cases}
$$

Le résultat (9) est tout à fait immédiat, d'après (6), sans qu'on ait besoin de se reporter au développement (7) que je n'ai donné que pour la facilité, notre esprit ayant à se familiariser avec le contenu des symboles.

On sait que l'on déduit de là pour le déterminant $|\alpha_i^j|$ des quantités α la valeur ± 1. On devra choisir la valeur $+1$, si les deux systèmes d'axes sont superposables.

De là on déduit, par résolution des équations (2), qu'on a réciproquement

$$
(10)\qquad x_i = \sum_j \alpha_i^j x_j'
$$

ou, plus simplement, par une nouvelle application de la convention admise,

$$
(11)\qquad x_i = \alpha_i^j x_j'
$$

et la considération de la condition (4) conduit aux relations réciproques de (8). On a, en effet, sans qu'il soit besoin de renouveler le développement,

$$
(12)\qquad x_j x_j = \alpha_j^i x_i' \alpha_j^l x_l' = \alpha_j^i \alpha_j^l x_i' x_l';
$$

Digitized by Google

d'où

$$\alpha_j^i \alpha_j^l = \delta^{il} = \begin{cases} 1 \text{ pour } i = \\ 1 \text{ pour } i \neq l \end{cases}, \tag{13}$$

Ces résultats sont bien connus.

Passons à la transformation des équations

$$4\pi D_i = K_i^j E_j \tag{14}$$

qu'on peut rappeler par le Tableau :

	E_1.	E_2.	E_3.
$4\pi D_1$	K_1^1	K_1^2	K_1^3
$4\pi D_2$	K_2^1	K_2^2	K_2^3
$4\pi D_3$	K_3^1	K_3^2	K_3^3

La quantité K a neuf composantes, mais je démontrerai que l'on a $K_2^1 = K_1^2$, $K_3^1 = K_1^3$, $K_2^3 = K_3^2$, de sorte que les neuf composantes se réduisent à six distinctes. On dit alors que K est un tenseur symétrique du second degré, ou que c'est une fonction vectorielle linéaire autoconjuguée.

Les K sont dits *coefficients d'inductivité spécifique*.

Changeons d'axes et accentuons les nouvelles composantes.

On aura, d'après (14), dans le nouveau système,

$$4\pi D'_s = K'^r_s E'_r, \tag{15}$$

$$4\pi D_i = \alpha_i^s 4\pi D'_s = \alpha_i^s K'^r_s E'_r = \alpha_i^s K'^r_s \alpha_j^r E_j; \tag{16}$$

d'où, par comparaison avec (14),

$$K_i^j = \alpha_i^s \alpha_j^r K'^r_s. \tag{17}$$

On aura, par exemple, en développant

$$K_1^2 = \alpha_1^1 \alpha_2^1 K_1^1 + \alpha_1^2 \alpha_2^2 K_2'^2 + \alpha_1^3 \alpha_2^3 K_3'^3 + (\alpha_1^2 \alpha_2^3 + \alpha_2^2 \alpha_1^3) K_2'^3 + (\alpha_1^3 \alpha_2^1 + \alpha_1^1 \alpha_2^3) K_3'^1 + (\alpha_1^1 \alpha_2^2 + \alpha_1^2 \alpha_2^1) K_1'^2. \tag{17 bis}$$

Les formules (17) sont les formules de transformation du tenseur K du second degré considéré. On voit quelles facilités apporte au calcul des tenseurs la convention qui consiste à supprimer dans les cas de répétition le symbole de sommation; celui-ci porte toujours exclusivement sur des indices répétés, et cette répétition est par elle-même un rappel suffisant des sommations à effectuer.

Le point principal dans la théorie du champ électrostatique de

Digitized by Google

Maxwell, c'est que l'énergie électrique du milieu est de l'énergie potentielle.

Le travail effectué par l'intensité électrique dont les composantes sont E_1, E_2, E_3 pour produire un déplacement dont les composantes sont D_1, D_2, D_3, dans l'unité de volume du milieu, est

$$dW = E_1 dD_1 + E_2 dD_2 + E_3 dD_3. \tag{18}$$

Mais nous admettons qu'un diélectrique soumis à un déplacement électrique est un système conservatif. W doit donc être une fonction de D_1, D_2, D_3, et puisque ces trois composantes peuvent varier indépendamment les unes des autres, nous aurons

$$E_1 = \frac{\partial W}{\partial D_1}, \qquad E_2 = \frac{\partial W}{\partial D_2}, \qquad E_3 = \frac{\partial W}{\partial D_3}, \tag{19}$$

et puisque l'on a

$$\frac{\partial^2 W}{\partial D_1 \partial D_2} = \frac{\partial^2 W}{\partial D_2 \partial D_1}, \tag{20}$$

on a

$$\frac{\partial E_1}{\partial D_2} = \frac{\partial E_2}{\partial D_1}. \tag{21}$$

De sorte que si l'on résout les équations (14), de façon à avoir

$$E_i = 4\pi \sum_j k_j^i D_j, \tag{22}$$

il vient pour les coefficients k, que nous appellerons *coefficients d'élasticité électrique*,

$$k_j^i = k_i^j \tag{23}$$

et l'on aurait, par conséquent, pour les coefficients primitifs, c'est-à-dire les coefficients d'inductivité spécifique,

$$K_j^i = K_i^j. \tag{24}$$

C'est une conséquence algébrique.

L'énergie W peut s'exprimer, soit en fonction des E, soit en fonction des D et l'on a, en appelant $d\varpi$ l'élément de volume,

$$W_E = \iiint \frac{1}{8\pi} \times (K_1^1 E_1^2 + K_2^2 E_2^2 + K_3^3 E_3^2 + 2K_2^3 E_2 E_3 + 2K_3^1 E_3 E_1 + 2K_1^2 E_1 E_2) d\varpi. \tag{25}$$

Digitized by Google

Plus simplement, on a symboliquement

$$dW_E = E_i\, dD_i = \frac{E_i}{4\pi} K_i^j\, dE_j \tag{26}$$

d'où

$$W_E = \frac{1}{8\pi}\iiint K_i^j E_i E_j\, d\varpi . \tag{27}$$

On aurait, de même,

$$W_D = 2\pi \iiint k_i^j D_i D_j\, d\varpi. \tag{28}$$

Dans le cas d'un milieu isotrope, il reste

$$W_E = \iiint \frac{K}{8\pi}(\overline{E}^2)\, d\varpi, \qquad W_D = \iiint \frac{2\pi}{K}(\overline{D}^2)\, d\varpi; \tag{29}$$

en posant

$$(\overline{E}^2) = E_1^2 + E_2^2 + E_3^2, \qquad (\overline{D}^2) = D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 \tag{30}$$

ou, dans le système électromagnétique, où K est l'inverse du carré de la vitesse de la lumière v,

$$W_D = 2\pi v^2 \iiint (\overline{D}^2)\, d\varpi. \tag{31}$$

Ce point est un des points principaux de la théorie de Maxwell.

Quantité d'électricité.

L'autre point principal, c'est que le flux total du déplacement qui sort d'une surface est égal à la quantité d'électricité contenue dans le volume limité par cette surface. Si e est la densité de la quantité d'électricité, on a donc

$$\iiint e\, d\varpi = \iint D_n\, ds, \tag{32}$$

D_n étant la composante du déplacement dirigé normalement à ds et vers l'extérieur.

Appliquons la formule d'Ostrogradski. Il vient, en se bornant à un élément de volume quelconque,

$$e = \operatorname{div} \overline{D}. \tag{33}$$

Digitized by Google

Et si le milieu n'a pas d'électricité libre,

$$\operatorname{div}\overline{D} = 0. \tag{34}$$

Cette expression $\operatorname{div}\overline{D}$, en coordonnées cartésiennes, est

$$\frac{\partial D_1}{\partial x_1} + \frac{\partial D_2}{\partial x_2} + \frac{\partial D_3}{\partial x_3}. \tag{35}$$

Cherchons son interprétation. Tout d'abord, je vais montrer analytiquement que cette quantité ne dépend pas du choix des axes rectangulaires.

En effet, je dis tout d'abord que $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$ se comportent comme les composantes d'un vecteur. En effet, d'après le théorème des fonctions de fonctions, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x'_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x'_1} + \frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x'_1}; \tag{35}$$

mais, d'après les équations de transformation, on a

$$\frac{\partial x_1}{\partial x'_1} = \alpha_1^1, \qquad \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} = \alpha_2^1, \qquad \frac{\partial x_3}{\partial x'_1} = \alpha_3^1; \tag{37}$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial x'_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\alpha_1^1 + \frac{\partial u}{\partial x_3}\alpha_2^1 + \frac{\partial u}{\partial x_3}\alpha_3^1 \tag{38}$$

et l'on aurait des équations analogues pour les autres coordonnées, ce qui prouve la proposition. Plus simplement, on peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \alpha_j^i \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{39}$$

Maintenant l'expression

$$\frac{\partial D_1}{\partial x_1} + \frac{\partial D_2}{\partial x_2} + \frac{\partial D_3}{\partial x_3} \tag{35}$$

n'est pas autre chose que le produit scalaire du vecteur symbolique $\nabla\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$ et du vecteur (D_1, D_2, D_3); on peut l'écrire $(\nabla\overline{D})$; on peut aussi l'écrire

$$\nabla_i D_i \tag{40}$$

puisque, l'indice i étant répété, il conviendra de faire la somme, mais

Digitized by Google

on a

$$\nabla'_i D'_i = \alpha'_j \nabla_j \alpha'_k D_k = \alpha'_j \alpha'_k \nabla_j D_k, \tag{41}$$

mais on a

$$\alpha'_j \alpha'_k = \begin{cases} 1 \text{ pour } j = k, \\ 0 \text{ pour } j \neq k; \end{cases} \tag{42}$$

d'où

$$\nabla'_i D'_i = \nabla_j D_j, \tag{43}$$

ce qui démontre l'invariance annoncée.

D'autre part, l'intégration par parties permet de démontrer analytiquement que l'on a

$$\int\int\int \operatorname{div} \overline{D}\, d\varpi = \int\int D_n\, dS. \tag{44}$$

La quantité qui figure dans le second membre, étant le déplacement à travers la surface qui limite le volume, est indépendante du choix des axes; il doit donc en être de même de la première, ce qui confirme notre calcul.

Cette formule montre que la condition

$$\operatorname{div} \overline{D} = 0 \tag{45}$$

entraîne cette conséquence que le flux total du vecteur $\overline{D}$ est nul à travers toute surface fermée et ce résultat nous donne l'image très nette du déplacement d'une sorte de fluide incompressible.

Potentiel.

L'existence du potentiel électrique se traduit, d'autre part, par la condition que le vecteur $\overline{E}$ dérive d'un potentiel V. On a donc

$$E_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \tag{46}$$

et les lignes qui, en chaque point, sont tangentes au vecteur électrique coupent normalement les surfaces équipotentielles. Je n'insiste pas sur ce point qui est bien connu. Les équations précédentes peuvent aussi se mettre sous la forme

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_j} = \frac{\partial E_j}{\partial x_i}. \tag{47}$$

Digitized by Google

On peut encore dire que le rotationnel du vecteur $\overline{E}$ est nul. Nous verrons dans un instant que le rotationnel est le vecteur symbolique dont les composantes sont les mineurs du Tableau :

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{array}$$

Courant.

Passons maintenant au courant. Voici la marche suivie par Maxwell. Dans toutes les expériences faites, le courant forme un circuit fermé de dimensions finies. On peut comparer l'action magnétique d'un circuit fini à celle d'un feuillet magnétique dont le circuit forme le bord.

Il a été démontré par de nombreuses expériences que l'action magnétique d'un petit circuit placé à des distances grandes par comparaison avec les dimensions du circuit sont les mêmes que celles d'un aimant dont l'axe est normal au plan du circuit et dont le moment magnétique est égal à l'aire du circuit multiplié par l'intensité du courant.

Si le circuit est supposé constituer la bordure d'un diaphragme qui s'appuie sur lui et si un feuillet métallique de puissance i coïncidant avec cette surface est substitué au courant électrique, alors l'action magnétique du feuillet sur tous les points situés à une certaine distance sera identique à celle du courant.

Or, nous savons que, dans le cas d'un feuillet magnétique, il y a un potentiel qui a une valeur déterminée pour tous les points situés à l'extérieur du feuillet, mais que la valeur du potentiel en deux points voisins, de part et d'autre du feuillet, est différente d'une quantité finie.

Si le champ magnétique dans le voisinage d'un courant électrique ressemble à celui qui règne au voisinage d'un feuillet magnétique, le potentiel magnétique, représenté par l'intégrale de ligne de la force magnétique ou, si l'on veut, le travail ou la circulation de cette force, sera la même pour deux lignes d'intégration, pourvu que l'une de ces lignes puisse être transformée dans l'autre par déplacement continu sans couper le courant électrique.

Si, cependant, une ligne d'intégration ne peut pas être transformée

Digitized by Google

dans l'autre sans couper le courant, l'intégrale de ligne de la force magnétique le long d'une des lignes différera de celle prise le long de l'autre d'une quantité qui dépendra de l'intensité du courant. Le potentiel magnétique dû à un courant électrique est donc une fonction qui a une série infinie de valeurs avec une différence commune, la valeur particulière dépendant du tracé de la ligne d'intégration. A l'intérieur de la substance du conducteur, il n'y a pas de propriété telle que l'existence du potentiel magnétique.

Admettons que l'action magnétique du courant ait un potentiel dans les conditions susindiquées et tâchons d'exprimer ce résultat mathématiquement.

En premier lieu, l'intégrale de ligne de la force magnétique le long d'un circuit fermé est nulle, pourvu que la courbe fermée n'entoure pas le courant électrique.

En second lieu, si le courant passe une fois et une fois seulement autour de la courbe fermée dans la direction positive, l'intégrale de ligne a une valeur déterminée, qu'on peut employer comme mesure de l'intensité du courant. Car si la courbe fermée change de forme d'une façon continue, sans couper le courant, l'intégrale de ligne demeure la même.

En mesure électromagnétique, l'intégrale de la ligne de force magnétique le long d'une courbe fermée est numériquement égale au courant embrassé multiplié par 4π.

Nous avons donc, en appelant $\overline{\mathrm{H}}$ le vecteur magnétique et K_n la valeur de la composante normale du courant de conduction $\overline{\mathrm{K}}$,

$$\int \frac{\mathrm{H}_l\, dx_l}{4\pi} = \int\int \mathrm{K}_n\, d\mathrm{S}. \tag{48}$$

L'application de la formule de Stokes donne

$$4\pi \mathrm{K}_{ij} = \frac{\partial \mathrm{H}_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathrm{H}_i}{\partial x_j}, \tag{49}$$

K_{ij} étant la composante du vecteur courant de conduction à travers un élément de surface parallèle au plan des $\mathrm{O}x_i$, $\mathrm{O}x_j$.

De là résulte, évidemment, que l'on a

$$\frac{\partial \mathrm{K}_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathrm{K}_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathrm{K}_{12}}{\partial x_3} = 0. \tag{50}$$

Digitized by Google

C'est-à-dire que la distribution du vecteur $\overline{K}$ est semblable à celle des vitesses d'un fluide incompressible.

Cas des courants ouverts.

Si les courants sont fermés sur eux-mêmes, comme dans le cas des courants permanents, cette conclusion est conforme à l'expérience. Mais si les courants de conduction ne sont pas fermés sur eux-mêmes, comme c'est le cas pour le courant de charge ou de décharge d'un condensateur, alors cette conclusion se trouve en défaut. On ne peut plus écrire la formule (49) et il est nécessaire d'introduire un nouveau terme.

Or, considérons le courant qui charge un conducteur (A) et traçons autour du conducteur (A) une surface géométrique (S) fermée qui l'enveloppe une fois. Soit Q la charge électrique de ce conducteur, nous aurons, en fonction du déplacement électrique $\overline{D}$,

$$Q = \int\int D_n \, dS, \tag{51}$$

D_n étant valeur de la composante normale comptée positivement suivant le sens de la normale extérieure.

D'où

$$dQ = dt \int\int \frac{dD_n}{dt} dS. \tag{52}$$

D'autre part, examinons le flux du vecteur courant qui sort de la surface, nous aurons, puisque le courant est compté positivement quand il traverse la surface dans le sens de la normale extérieure,

$$-dQ = dt \int\int K_n dS; \tag{53}$$

d'où

$$0 = dt \int\int \left[K_n + \frac{dD_n}{dt} \right] dS. \tag{54}$$

Ce qui prouve que c'est le vecteur $\overline{C}$ résultant de $\overline{K}$ et de $\frac{d\overline{D}}{dt}$,

$$\overline{C} = \overline{K} + \frac{d\overline{D}}{dt}, \tag{55}$$

qui jouit de la propriété de se comporter comme la vitesse d'un fluide incompressible.

Digitized by Google

Ce vecteur $\overline{C}$ est le courant total de Maxwell; il se compose, géométriquement, de deux courants, qui sont : le premier, le courant de conduction $\overline{K}$, et le second, le courant de déplacement $\frac{d\overline{D}}{dt}$.

Pour Maxwell, la nécessité de faire entrer en ligne de compte le courant de déplacement était évidente, puisque ce courant représentait, pour lui, un courant d'électricité véritable.

Pour Lorentz, ce courant ne peut être, dans le vide, que dû au déplacement de l'éther et non pas à un véritable déplacement de fluide électrique. Dans le vide, d'ailleurs, l'absence de toute espèce d'électricité entraîne, en même temps, $\overline{K} = 0$; il ne reste donc que le courant de déplacement.

Dans les milieux isolants, pour Maxwell, seul le terme en $\frac{d\overline{D}}{dt}$ subsistait, mais alors il concevait ce courant comme pouvant, éventuellement, être constitué par le courant dû au mouvement des charges sur les petites sphères électrisées de Mossetti; il ne distinguait pas entre le courant de déplacement proprement dit qui, dans les idées plus récentes, a son siège dans l'éther, et le courant de polarisation diélectrique qui porte sur des grains d'électricité. Par opposition avec la substance de l'éther, on peut donner à ces grains d'électricité, fussent-ils même dénués de masse matérielle, le nom de *matière*.

On voit que la même équation, tout en subsistant quand on passe d'une théorie à une autre, est susceptible de changer de signification, avec le progrès des conceptions scientifiques.

Maxwell se contente de dire :

« L'un des principaux traits caractéristiques de ce traité est la doctrine qui affirme que le courant véritable $\overline{C}$, dont dépendent les phénomènes électromagnétiques, n'est pas la même chose que le courant de conduction $\overline{K}$, mais que la dérivée par rapport au temps de déplacement électrique $\overline{D}$ doit entrer en ligne de compte dans l'estimation du mouvement total de l'électricité, de sorte que nous devons écrire, pour l'équation du courant véritable,

$$\overline{C} = \overline{K} + \frac{d\overline{D}}{dt}. \quad (55)$$ »

A ces équations, il convient d'ajouter la loi d'Ohm :

$$\overline{K} = c\overline{E}, \quad (56)$$

Digitized by Google

où c est la conductibilité spécifique ; c est une constante dans les corps homogènes et isotropes; dans les corps anisotropes, dans certains cristaux, par exemple, c sera une fonction vectorielle linéaire; c'est un tenseur du second degré soumis aux mêmes transformations que la capacité inductive spécifique.

Le rotationnel.

Nous sommes amenés, par ces considérations, à rechercher, d'une façon générale, au point de vue géométrique, la nature du vecteur $\overline{\mathrm{R}}$ défini en fonction du vecteur $\overline{\mathrm{A}}$, par les relations

$$\mathrm{R}_{ij} = \frac{\partial \mathrm{A}_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial x_j}. \tag{57}$$

Première remarque. — Dans un système de coordonnées à quatre dimensions, les quantités i, j étant susceptibles chacune de prendre les valeurs entières de un à quatre, le nombre des combinaisons est de six. On a donc, pour $\overline{\mathrm{R}}$, une quantité représentée par six composantes et non pas quatre, ce qui montre que, dans ce cas, $\overline{\mathrm{R}}$ n'est pas un vecteur.

Deuxième remarque. — Dans le cas de trois dimensions, en axes rectangulaires, nous allons voir que $\overline{\mathrm{R}}$ se transforme comme un vecteur ordinaire.

En effet, $\overline{\mathrm{R}}$ n'est autre que le produit vectoriel du vecteur symbolique ∇, qui a pour composantes $\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial x_2}$, $\frac{\partial}{\partial x_3}$, et que nous avons déjà considéré, et du vecteur $\overline{\mathrm{A}}$. On désigne d'ordinaire ce produit vectoriel par la notation $[\nabla \mathrm{A}]$, et les composantes de ce produit sont les mineurs du tableau

$$\begin{cases} \nabla_1, & \nabla_2, & \nabla_3 \\ \mathrm{A}_1, & \mathrm{A}_2, & \mathrm{A}_3 \end{cases} \qquad \left(\text{avec } \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\right). \tag{58}$$

On a, par exemple,

$$[\nabla \mathrm{A}]_1 = \nabla_2 \mathrm{A}_3 - \nabla_3 \mathrm{A}_2 = \frac{\partial \mathrm{A}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathrm{A}_2}{\partial x_3}. \tag{59}$$

Faisons une transformation linéaire, nous aurons pour nouvelles

Digitized by Google

composantes les mineurs du tableau

$$(60)\quad \begin{cases} \alpha_1^1\,\nabla_1+\alpha_2^1\,\nabla_2+\alpha_3^1\,\nabla_3, & \alpha_1^2\,\nabla_1+\alpha_2^2\,\nabla_2+\alpha_3^2\,\nabla_3, & \alpha_1^3\,\nabla_1+\alpha_2^3\,\nabla_2+\alpha_3^3\,\nabla_3, \\ \alpha_1^1\,A_1+\alpha_2^1\,A_2+\alpha_3^1\,A_3, & \alpha_1^2\,A_1+\alpha_2^2\,A_2+\alpha_3^2\,A_3, & \alpha_1^3\,A_1+\alpha_2^3\,A_2+\alpha_3^3\,A_3, \end{cases}$$

et, par suite, en accentuant les vecteurs rapportés aux nouveaux axes :

$$(61)\qquad [\nabla A]'_{23}=(\alpha_1^2\alpha_1^3-\alpha_1^2\alpha_1^3)\,\nabla_1 A_1+(\alpha_1^2\alpha_2^3-\alpha_2^2\alpha_1^3)\,\nabla_1 A_2+\ldots$$

ou, en supprimant les termes dont les coefficients sont identiquement nuls :

$$(62)\qquad [\nabla A]'_{23}=(\alpha_1^2\alpha_2^3-\alpha_2^2\alpha_1^3)\,[\nabla A]_{12}+(\alpha_2^2\alpha_3^3-\alpha_3^2\alpha_2^3)\,[\nabla A]_{23}+(\alpha_3^2\alpha_1^3-\alpha_1^2\alpha_3^3)\,[\nabla A]_{31},$$

$$(63)\qquad [\nabla A]'_{23}=\alpha_3^1\,[\nabla A]_{12}+\alpha_1^1\,[\nabla A]_{23}+\alpha_2^1\,[\nabla A]_{31}.$$

Pour passer de l'équation (62) à l'équation (63), nous avons fait appel aux relations telles que

$$(64)\qquad \alpha_3^1=\alpha_1^2\alpha_2^3-\alpha_2^2\alpha_1^3,$$

qui ne sont vraies que dans le cas d'une transformation cartésienne, où la forme $\sum_i x_i x_i$ se transforme en elle-même.

Plus simplement, en recourant encore à la convention, qui sous-entend le signe de sommation devant tout indice répété, on a

$$(65)\qquad \nabla'_i A'_j-\nabla'_j A'_i=\alpha_r^i\,\nabla_r\alpha_s^j\,A_s-\alpha_r^j\,\nabla_r\alpha_s^i\,A_s=(\alpha_r^i\alpha_s^j-\alpha_r^j\alpha_s^i)\,\nabla_r A_s$$

ou, en réunissant les deux termes en $\nabla_r A_s$ et en $\nabla_s A_r$ en un seul,

$$(66)\qquad \nabla'_i A'_j-\nabla'_j A'_i=(\alpha_r^i\alpha_s^j-\alpha_r^j\alpha_s^i)\,(\nabla_r A_s-\nabla_s A_r).$$

Cette formule symbolique redonne, par le développement de la sommation, la formule (62).

Dans cette formule, les α entrent au second degré; on dit qu'on a affaire à un tenseur du second degré. Grâce aux relations (64), ce tenseur dégénère en un simple tenseur du premier degré, c'est-à-dire en vecteur.

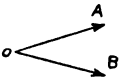
Mais $\alpha_r^i\alpha_s^j-\alpha_r^j\alpha_s^i$ est une des composantes d'une grandeur dont la nature est celle d'une surface ou vecteur axial, tandis que $(\alpha_1^1,\ \alpha_1^2,\ \alpha_1^3)$ représentent une grandeur de la nature d'un vecteur proprement dit ou vecteur polaire.

Digitized by Google

Un vecteur, qui pourrait être conçu comme une flèche, change de sens en se reflétant dans un plan perpendiculaire; un ensemble de deux vecteurs coplanaires caractérise une surface, celle du triangle AOB, et il ne change pas en se reflétant dans le plan commun.

La différence essentielle des vecteurs polaires et des vecteurs axiaux est cette différence dans la symétrie.

Fig. 1.



Je viens de considérer le produit vectoriel de deux vecteurs. Mais on a aussi à considérer, comme nous allons le voir dans un instant, le produit vectoriel de deux vecteurs, dont l'un est lui-même le vecteur représentatif d'un produit vectoriel.

Soient B et C deux vecteurs, [BC] leur produit vectoriel, soit A un troisième vecteur; considérons le produit vectoriel

$$[A[BC]],$$

dont la première composante est

$$A_2(B_1C_2 - B_2C_1) - A_3(B_3C_1 - C_3B_1), \tag{67}$$

qu'on peut écrire

$$B_1(A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3) - C_1(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3),$$

d'où la règle de calcul

$$[A[BC]] = B(AC) - C(AB), \tag{68}$$

(AC) et (AB) représentant des produits scalaires, qui restent invariants, par une transformation de coordonnées rectangulaires; de là résulte que le produit envisagé se transforme comme les vecteurs B et C, c'est-à-dire qu'il a le caractère vectoriel.

Ainsi, dans les équations

$$4\pi C_1 = 4\pi\left(K_1 + \frac{dD_1}{dt}\right) = \frac{\partial H_3}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_3}, \tag{69}$$

le vecteur courant étant de la nature d'un vecteur pur, le second membre se présente sous la forme de composantes d'un produit

Digitized by Google

vectoriel de deux vecteurs, dont l'un est le vecteur symbolique ∇ et dont l'autre est le vecteur H. Mais le vecteur H n'est qu'un tenseur du second degré dégénéré. Car le champ magnétique doit jouir de la symétrie qui le produit; or, on peut le considérer comme produit par un courant qui circule dans un anneau. Le plan moyen de l'anneau est un plan de symétrie pour le système des filets de courant. Par suite, le champ magnétique doit jouir de la symétrie d'un cylindre tournant, c'est-à-dire de la symétrie d'un système de deux vecteurs ayant même origine. Au contraire, le champ électrique produit entre deux plateaux chargés d'électricité contraires change de signe quand le système se reflète dans un plan parallèle aux plateaux. Sa symétrie est celle d'un vecteur pur. Ces remarques sont dues à Curie.

Si H est de la forme [BC], le second membre des équations est de la forme [A[BC]] et l'on obtient bien ainsi un vecteur pur, le vecteur courant.

Interprétation cinématique de la divergence et du rotationnel.

Mon but étant de faire ressortir, au passage, les analogies qu'offrent les divers aspects mécaniques des phénomènes avec ceux de l'électricité, je vais indiquer ce que signifient les grandeurs divergence et rotationnel pour la cinématique d'un milieu continu.

Soient (a_1, a_2, a_3) les coordonnées d'un élément à l'époque t_0, ses coordonnées à l'époque t seront

$$x_i = f_i(a_1, a_2, a_3, t). \tag{70}$$

Considérons, à l'instant t_0, une certaine portion S du corps, remplissant une région E_0 de l'espace. A l'instant t, la matière de S remplit une certaine région E de l'espace qui correspond, point par point, au domaine E_0 par les formules (70). D'après la règle du changement de variable sous le signe d'intégration, on a

$$\iiint_E dx_1\, dx_2\, dx_3 = \iiint_{E_0} |\Delta|\, da_1\, da_2\, da_3, \tag{71}$$

Δ étant le déterminant fonctionnel. Il est positif, si t est suffisamment petit, puisque, pour $t = 0$, il est égal à un.

Le volume E est donc donné par la dernière intégrale.

Digitized by Google

En particulier, considérons à l'instant t_0 un élément matériel de dimensions infinitésimales qui comprend, à son intérieur, le point $a_1^{(0)} a_2^{(0)} a_3^{(0)}$; soient ε_0 son volume à l'instant t_0, ε son volume à l'instant t, on a

$$\varepsilon = \int\int\int_{\varepsilon_0} \Delta \, da_1 \, da_2 \, da_3 = \Delta(a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, a_3^{(0)}, t)\,\varepsilon_0(1+\tau_i), \tag{72}$$

τ_i tend vers zéro, avec les dimensions de l'élément. La partie principale de ε est donc $\Delta(a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, a_3^{(0)}, t)\varepsilon_0$, et l'on peut écrire, en supprimant les indices zéro :

$$\varepsilon = \Delta(a_1, a_2, a_3, t)\varepsilon_0. \tag{73}$$

La dilatation cubique est $\Delta - 1$.

A l'instant t, voisin de t_0, soit $t = t_0 + h$, la dilatation est de l'ordre de h, soit $h\delta$ sa partie principale.

δ est le coefficient de dilatation cubique du corps à l'instant t_0 au point (a_1, a_2, a_3). Calculons δ. On a

$$\begin{aligned} x_i &= a_i + h f_i'(a_1, a_2, a_3, t^0) + h^2(\ldots) + \ldots \\ &= a_i + h u_i(a_1, a_2, a_3, t^0) + h^2(\ldots), \end{aligned} \tag{74}$$

(u_1, u_2, u_3) étant les composantes de la vitesse initiale (c'est-à-dire pour $t = t_0$) de l'élément placé en (a_1, a_2, a_3).

D'après ces égalités, Δ prend la forme :

$$\begin{vmatrix} 1 + h\frac{\partial u_1}{\partial a_1} + \ldots & h\frac{\partial u_1}{\partial a_2} + \ldots & h\frac{\partial u_1}{\partial a_3} + \ldots \\ h\frac{\partial u_2}{\partial a_1} + \ldots & 1 + h\frac{\partial u_2}{\partial a_2} + \ldots & h\frac{\partial u_2}{\partial a_3} + \ldots \\ h\frac{\partial u_3}{\partial a_1} + \ldots & h\frac{\partial u_3}{\partial a_2} + \ldots & 1 + h\frac{\partial u_3}{\partial a_3} + \ldots \end{vmatrix} \tag{75}$$

$$= 1 + h\left(\frac{\partial u_1}{\partial a_1} + \frac{\partial u_2}{\partial a_2} + \frac{\partial u_3}{\partial a_3}\right) + \ldots;$$

d'où

$$\delta(a_1, a_2, a_3, t_0) = \frac{\partial u_1}{\partial a_1} + \frac{\partial u_2}{\partial a_2} + \frac{\partial u_3}{\partial a_3}. \tag{76}$$

Ce qu'on pourrait écrire symboliquement, en supprimant le signe $\sum_i$:

$$\delta = \frac{\partial u_i}{\partial a_i}. \tag{77}$$

Digitized by Google

Telle est l'interprétation cinématique de la divergence, à savoir, d'être un coefficient de dilatation cubique, si le vecteur $\bar{u}$ est une vitesse.

Remarque de Maxwell.

Supposons, maintenant, que (u_1, u_2, u_3) dérivent d'une fonction V. Je dis que δ caractérise l'écart moyen de la valeur de V dans une sphère infiniment petite, avec sa valeur $V^{(0)}$ au centre. On a, en effet, par hypothèse,

$$u_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} \qquad \text{et} \qquad \delta = \Delta V \tag{78}$$

en posant

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2}.$$

L'opérateur Δ est ce qu'on appelle *le Laplacien*. On pourrait l'écrire, symboliquement,

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{79}$$

Considérons maintenant une sphère de rayon infiniment petit R; soient (x_i) les coordonnées du centre O de cette sphère, et soient $(x_i + h_i)$ les coordonnées d'un point P intérieur à cette sphère.

On a, symboliquement,

$$V_P = V_0 + \frac{\partial V}{\partial x_i} h_i + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + \ldots; \tag{80}$$

d'où, en appelant $d\varpi$ l'élément de *volume*,

$$\begin{aligned}\iiint V_P \, d\varpi = V_0 \frac{4\pi}{3} R^3 &+ \frac{\partial V}{\partial x_i} \iiint h_i \, d\varpi \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \iiint h_i h_j \, d\varpi + \ldots.\end{aligned} \tag{81}$$

Mais, le point O étant le centre de gravité de la sphère, on a

$$\iiint h_i \, d\varpi = 0 \tag{82}$$

et, d'autre part, on a, par raison de symétrie,

$$\iiint h_i h_j \, d\varpi = I_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{pour} \quad i = j, \\ 0 & \text{pour} \quad i \neq j, \end{cases} \tag{83}$$

Digitized by Google

en appelant I le moment d'inertie de la sphère de densité un par rapport à l'un de ses diamètres. Il vient donc, puisque $\frac{I}{2} = \frac{4\pi R^3}{3} \times \frac{R^2}{5}$,

$$\frac{\iiint V_P \, d\varpi}{\frac{4}{3}\pi R^3} - V_0 = \frac{1}{2}\frac{R^2}{5}\Delta V. \tag{84}$$

Ce qui démontre notre proposition. On sait, d'ailleurs, qu'inversement si, dans un espace E, ΔV est nul, la valeur moyenne de V sur une sphère de rayon quelconque tracée dans E est égale à sa valeur V_0 au centre. C'est une application connue de la formule de Green.

Vecteur tourbillon.

Passons à l'interprétation du rotationnel. Soient, à l'instant t, P un élément matériel d'un fluide, Σ une sphère de centre P et de rayon très petit R, P′ un élément du fluide intérieur à Σ. Appelons mouvement des éléments P′ autour de P le mouvement de ces éléments rapportés aux axes Ph_1, Ph_2, Ph_3 parallèles aux axes fixes rectangulaires Ox_1, Ox_2, Ox_3, et dont l'origine coïncide constamment avec P, et calculons, dans ce mouvement, le moment cinétique à l'instant t, par rapport à P, du fluide intérieur à Σ. Si P occupe à l'instant t la position (x_r), et P′ la position $(x_r + h_r)$, les composantes de la vitesse du point P à l'instant t sont (u_i), et celles de la vitesse du point P′ $\left(u_r + h_i \frac{\partial u_r}{\partial x_i}\right)$, en sous-entendant la somme Σ_i devant les monomes où l'indice i est redoublé. La vitesse de P′ dans son mouvement autour de P a pour composantes $h_i \frac{\partial u_r}{\partial x_i}$, cette expression étant relative à l'axe Ox_r. Le moment cinétique PK de la sphère fluide a pour projections, sur Ox_1, en appelant ρ la densité,

$$\iiint \rho \left(h_2 h_j \frac{\partial u_3}{\partial x_j} - h_3 h_i \frac{\partial u_2}{\partial x_i}\right) dh_1 \, dh_2 \, dh_3 \tag{85}$$

ou, d'après les formules (83),

$$\frac{I}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right), \tag{86}$$

I désignant le moment d'inertie par rapport à un diamètre d'une sphère de rayon R et de densité ρ.

Digitized by Google

Les composantes suivant les axes du moment cinétique PK sont donc :

$$\frac{1}{2} I \left(\frac{\partial u_s}{\partial x_r} - \frac{\partial u_r}{\partial x_s} \right). \tag{86}$$

Pour qu'une sphère solide de même rayon et de même densité que Σ ait le même moment cinétique PK dans son mouvement autour de son centre P, il faut et il suffit qu'elle soit animée d'une rotation instantanée Pω dont les composantes soient

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_s}{\partial x_r} - \frac{\partial u_r}{\partial x_s} \right). \tag{87}$$

On donne à ce vecteur Pω le nom de rotation ou de tourbillon du fluide au point P à l'instant t.

Pour qu'il existe un potentiel des vitesses quel que soit t, il faut et il suffit que le tourbillon soit nul en chaque point, à chaque instant. On dit, dans ce cas, que le mouvement est irrotationnel.

Le rotationnel est l'opérateur dont les composantes sont le double du tourbillon, d'après la dénomination la plus habituelle.

Remarque au point de vue dynamique.

Si nous supposons qu'à l'instant t toute la matière extérieure à la sphère soit anéantie et que la matière intérieure soit brusquement solidifiée, la rotation instantanée initiale que prendra cette sphère solide sera précisément le tourbillon au point considéré.

En effet, au moment où la solidification a lieu, le milieu extérieur étant supprimé, des percussions se produisent entre les divers points matériels qui constituent la sphère, mais ces percussions sont intérieures à la sphère.

Or on sait que, si un système matériel subit des percussions intérieures, la somme des projections des quantités de mouvement sur un axe est la même après et avant la percussion, ainsi que la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à un axe.

Appliquons ce théorème à la sphère infiniment petite, en remarquant que cette sphère est homogène et que sa densité est sa densité au centre; notre proposition se trouve évidemment démontrée.

Nous avons donc ainsi donné les images mécaniques qui cor-

Digitized by Google

respondent aux expressions analytiques de la divergence et du rotationnel.

Définition de la divergence indépendante de la considération d'un système de coordonnées.

Soit $d\Phi$ le flux d'un vecteur A à travers un élément de surface défini par sa superficie dS et par un vecteur unité ν qui lui est normal. Désignons par $(A\nu)$ la valeur de la projection de A sur ν, on aura

$$d\Phi = (A\nu)\, d\mathrm{S}$$

et, pour une surface fermée S enveloppant un volume U, on aura

$$\Phi = \int_{\mathrm{S}} (A\nu)\, d\mathrm{S}.$$

Décomposons le volume U par un diaphragme Σ en deux volumes partiels U_1 et U_2. Le diaphragme Σ partage également la surface S en deux surfaces S_1 et S_2.

Si j'appelle F_1 et F_2 les flux à travers S_1 et S_2, j'aurai

$$\Phi = F_1 + F_2.$$

D'autre part, si j'envisage les flux Φ_1 et Φ_2 sortant de U_1 et U_2, les parties de ces flux, qui passent à travers Σ sont égales et de signes contraires; on aura donc aussi

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2.$$

Si donc U est infiniment petit ainsi que U_1 et U_2, il résulte de là que Φ est proportionnel au volume U. Dès lors, on peut chercher la limite $\frac{\Phi}{U}$ quand U tend vers zéro. On obtient ainsi la divergence en un point.

Définition du rationnel indépendante de la considération d'un système de coordonnées.

Soit $d\mathfrak{C}$ le travail d'un vecteur B le long d'un élément de chemin ds, défini par sa longueur ds et le vecteur unité τ qui lui est tangent. Soit $(B\tau)$ la valeur de la projection de B sur τ. On aura

$$d\mathfrak{C} = (B\tau)\, ds$$

et, pour un contour fermé C, on aura

$$\mathfrak{C} = \int_{\mathrm{C}} (B\tau)\, ds.$$

Digitized by Google

Si la surface plane S limitée par un contour C est décomposée par une coupure Γ en deux parties S_1 et S_2, tandis que le contour C lui-même se trouve également partagé par la coupure en deux parties C_1 et C_2, le travail total $\mathfrak{T}$ sera la somme des travaux T_1 et T_2 le long de C_1 de C_2 et l'on aura

$$\mathfrak{T} = T_1 + T_2.$$

D'autre part, si l'on envisage les travaux $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$ le long des lignes qui bordent les surfaces S_1 et S_2, les parties de ces travaux qui se rapportent à la coupure sont égales et de signes contraires; on aura donc aussi

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2.$$

Si donc S est infiniment petit, ainsi que S_1 et S_2, il résulte de là que $\mathfrak{T}$ est proportionnel à S. Dès lors, on peut chercher la limite de $\frac{\mathfrak{T}}{S}$ quand S tend vers zéro. On obtient ainsi sur un point P une limite R.

La surface élémentaire choisie a une orientation quelconque.

Faisons alors trois déterminations en un point P, en prenant pour éléments de surface les faces latérales S_1, S_2, S_3 d'un tétraèdre trirectangle dont j'appelle S la base. Nous aurons alors respectivement les limites R_1, R_2, R_3. Appelons R la limite correspondant à l'orientation de la base. On aura évidemment, en ayant égard aux chemins parcourus deux fois en sens contraires et qui se détruisent,

$$R_1 S_1 + R_2 S_2 + R_3 S_3 = RS,$$

ce qui prouve que R est la valeur de la projection, sur la normale à S, d'un vecteur $\mathfrak{R}$ dont les composantes normales à S_1, S_2, S_3 sont respectivement R_1, R_2, R_3. C'est ce vecteur $\mathfrak{R}$ qu'on appelle le *rotationnel*.

Théorie de l'induction de Maxwell.

La théorie des circuits électriques a été développée par Maxwell, en partant de l'idée que les phénomènes électrodynamiques étaient la manifestation sensible du mouvement d'un mécanisme caché auquel s'appliqueraient les équations de Lagrange sur les systèmes à liaisons. Cette théorie a donc pour résultat de donner des phénomènes électriques une conception mécanique.

C'est ce que je me propose d'indiquer brièvement en suivant

Digitized by Google

Maxwell d'aussi près que possible, mais en supposant connus les faits fondamentaux de l'induction.

Soient A_1, A_2, ... les divers circuits conducteurs. Leurs formes et leur position relative dépendent de variables x_1, x_2, ..., dont le nombre est égal au nombre des degrés de liberté du système mécanique. Ce sont les variables géométriques.

Si y_1 désigne la quantité d'électricité qui a traversé une section donnée du conducteur A_1 depuis le moment pris pour origine des temps, l'intensité du courant sera y'_1, c'est-à-dire la dérivée de y par rapport au temps t.

Il y a une variable telle que y'_1 pour chaque circuit du système. Nous considérons l'état du système comme défini non seulement par les variables x, mais encore par les variables y, qui sont des coordonnées généralisées, dont les vitesses sont les y', c'est-à-dire les intensités des courants.

Soit T l'énergie électrocinétique du système. C'est une fonction du second degré homogène par rapport aux vitesses, c'est-à-dire aux intensités. Elle est de la forme ci-après, les liaisons étant indépendantes du temps :

$$T = \frac{1}{2} \Sigma M_{ij} y'_i y'_j \qquad (M_{ij} = M_{ji}), \tag{88}$$

les coefficients M_{ij} étant des fonctions des variables géométriques x_r. Les variables électriques y_i n'entrent pas dans cette expression.

En dérivant T par rapport à la quantité y'_i, vitesse généralisée, nous obtenons p_i, qui est la quantité de mouvement correspondant à la variable y_i, au sens de la théorie dynamique.

Dans la théorie électrique, on peut appeler p_i la quantité de mouvement électrocinétique du circuit A_i. Sa valeur est

$$p_i = M_{ij} y'_j, \tag{89}$$

en sous-entendant le signe Σ_j.

Soit E la force électromotrice appliquée au circuit A provenant de quelque cause extérieure, telle qu'une pile voltaïque ou thermo-électrique, capable de produire un courant en dehors de l'induction électromagnétique.

Soit R la résistance du circuit, alors, d'après la loi d'Ohm, une différence de potentiel Ry' est nécessaire pour surmonter la résis-

Digitized by Google

tance, ce qui laisse une force électromotrice $E - Ry'$ disponible pour faire varier la quantité de mouvement du circuit. Appelant cette force Y' nous avons, en vertu des équations bien connues de Lagrange,

$$Y' = \frac{dp}{dt} - \frac{dT}{dy}; \tag{90}$$

mais, comme T n'implique pas y, le dernier terme disparaît; donc l'équation de la force électromotrice est, par suite,

$$E - Ry' = Y' = \frac{dp}{dt} \tag{91}$$

ou

$$E = Ry' + \frac{dp}{dt}.$$

La force électromotrice appliquée est donc égale à la résultante de deux forces composantes, l'une, Ry', qui sert à maintenir le courant malgré la force de viscosité, l'autre qui sert à accroître la quantité de mouvement électromagnétique. Voilà quelle est la force électromotrice qu'il faudrait emprunter à des sources indépendantes de l'induction magnéto-électrique. La force électromotrice provenant de l'induction électromagnétique toute seule, est évidemment $-\frac{dp}{dt}$. On peut dire encore que la différence de potentiel totale Ry', force résistante, fait équilibre à la force électromotrice extérieure E et à la force électromotrice d'induction, Y' étant la force extérieure capable de faire équilibre à la force électromotrice d'induction $-\frac{dp}{dt}$. Observons que ce qu'on appelle force électromotrice d'induction n'est pas une force extérieure appliquée au système, mais une réaction du système due à son inertie.

Étude du champ électromagnétique.

Considérant que la quantité p dépend de la forme et de la position du circuit, Maxwell suppose que chaque partie du circuit contribue, pour sa part, à la valeur de p, et que la part contributive de chaque portion du circuit dépend de la forme et de la position de cette portion seulement, et non de la position des autres parties du circuit, hypothèse justifiée, puisqu'il s'agit, non d'un courant dont les divers

Digitized by Google

éléments pourraient réagir l'un sur l'autre, mais simplement d'une pure ligne géométrique représentant un circuit où un courant pourrait circuler, mais qui n'est pour le moment qu'une configuration.

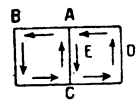
Il pose donc :

92) $$p = \int \mathrm{J}\, ds,$$

ds étant l'élément de circuit et J une quantité qui dépend de la position et de la direction de l'élément *ds*.

Nous avons maintenant à déterminer la forme de la quantité J. En premier lieu, si *ds* change de sens, J change de signe. Donc, si deux circuits ABCE et AECD ont l'arc AEC en commun, mais

Fig. 2.

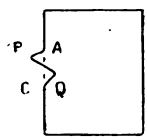


compté dans deux directions opposées pour les deux circuits, la somme des valeurs de *p* pour les deux circuits sera égale à la valeur de *p* pour le circuit unique ABCD, qui est composé de leur contour extérieur.

On peut décomposer, par un quadrillage, la superficie entourée par une courbe, en un certain nombre de parties élémentaires, bordées chacune par des circuits dont les éléments limitrophes donneront, dans l'intégrale de ligne, des parties qui se détruiront.

Si l'on applique ces considérations à un élément de surface, on

Fig. 3.



voit que la valeur de *p* sera proportionnelle à la surface dudit élément. On pourra écrire

93) $$p = \int\int \mathrm{I}\, d\mathrm{S}.$$

Si donc l'on remplace, dans un circuit, l'élément rectiligne AC

Digitized by Google

par le circuit sinueux APQC, qui ne modifie pas la surface embrassée, on ne change pas p. On peut donc écrire

$$(94) \qquad J\,ds = A_1\,dx_1 + A_2\,dx_2 + A_3\,dx_3, \qquad J\,ds = A_i\,dx_i,$$

de sorte que, si $\overline{A}$ est le vecteur dont les composantes sont (A_1, A_2, A_3), J est la valeur de la composante tangentielle (suivant ds) de A.

Mais la formule de Stokes appliquée à un élément donne

$$(95) \qquad \begin{aligned} p &= \int (A_1\,dx_1 + A_2\,dx_2 + A_3\,dx_3) \\ &= \int\int \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right) dx_2\,dx_3 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right) dx_3\,dx_1 \\ &\quad + \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right) dx_1\,dx_2. \end{aligned}$$

Appelons $\overline{B}$ le rotationnel de $\overline{A}$. Il vient

$$(96) \qquad p = \int\int (\overline{B})_n\,dS,$$

et I n'est que la projection de $\overline{B}$ sur la normale à dS.

On a donc

$$(97) \qquad B_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}$$

et deux équations analogues.

Or on sait, par les expériences de Faraday, que les phénomènes de la force électromagnétique et de l'induction dans un circuit dépendent de la variation dans le nombre de lignes d'induction magnétique qui passait à travers le circuit. Mais le nombre de ces lignes s'exprime mathématiquement par l'intégrale de surface de l'induction magnétique, la surface d'intégration étant un diaphragme quelconque bordé par le circuit. Donc, nous devons regarder le vecteur $\overline{B}$ comme représentant la quantité que nous connaissons déjà et que nous appelons l'*induction magnétique*.

Par cette assimilation, nous ne faisons qu'introduire un fait expérimental dans la théorie, nous ne faisons que donner un nom à une quantité mathématique et la justification doit être recherchée dans l'accord des propriétés de cette quantité mathématique avec celles de la grandeur physique dont nous lui donnons le nom.

Nous avons vu que la force électromotrice $\mathcal{E}$, due à l'induction

Digitized by Google

agissant sur un circuit secondaire exposé à l'induction du circuit primaire, est égale à $-\frac{dp}{dt}$, où l'on a

$$p = \int A_i \, dx_i \qquad (\Sigma_i \text{ omis}). \tag{98}$$

Si nous supposons, pour simplifier, que le secondaire est immobile, nous aurons

$$\mathcal{E} = -\frac{dp}{dt} = -\int \frac{dA_i}{dt} \, dx_i. \tag{99}$$

Si donc, en appelant $\overline{E}$ la force électromotrice locale, nous posons

$$\mathcal{E} = \int E_i \, dx_i,$$

nous aurons

$$E_i = -\frac{dA_i}{dt} - \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \tag{100}$$

ψ étant une fonction scalaire arbitraire.

En l'absence de phénomènes d'induction, il resterait $-\frac{\partial \psi}{\partial x_i}$, de sorte que ψ est le potentiel électrostatique.

Les équations (97) dérivées par rapport au temps donnent alors

$$\frac{dB_{rs}}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_r}\frac{dA_s}{dt} - \frac{\partial}{\partial x_s}\frac{dA_r}{dt} = -\left(\frac{\partial E_s}{\partial x_r} - \frac{\partial E_r}{\partial x_s}\right). \tag{101}$$

Les deux groupes d'équations du champ électromagnétique sont donc les suivantes :

$$4\pi \overline{C} = \operatorname{rot} \overline{H}, \qquad \text{d'où} \qquad \operatorname{div} \overline{C} = 0 \tag{102}$$

et

$$-\frac{d\overline{B}}{dt} = \operatorname{rot} \overline{E}, \qquad \text{avec} \qquad \operatorname{div} \overline{B} = 0.$$

L'équation relative à la divergence de $\overline{C}$ indique que le courant se comporte comme un fluide incompressible.

L'équation relative à la divergence de $\overline{B}$ est l'expression mathématique de l'inexistence du magnétisme vrai, telle que la démontre l'expérience de l'aimant brisé. Le circuit magnétique des inducteurs d'une machine est comparable au circuit d'un courant. Cette propriété est utile pour le calcul des flux magnétiques, surtout parce que

Digitized by Google

les pièces en fer ou en fonte ont une perméabilité si grande par rapport à l'air ou au cuivre, que l'on connaît approximativement, *a priori*, le chemin des lignes d'induction magnétique.

Équations du champ électromagnétique.

Les équations appliquées à l'éther donneront, simplement :

Équation d'Ampère, ou de l'électromagnétisme

$$(103) \qquad \frac{d\overline{D}}{dt} = \frac{\operatorname{rot}\overline{H}}{4\pi}, \qquad \operatorname{div}\overline{D} = 0, \qquad \overline{D} = \frac{K_0\overline{E}}{4\pi};$$

Équation de Faraday, ou de l'induction

$$(104) \qquad -\mu_0\frac{d\overline{H}}{dt} = \operatorname{rot}\overline{E}, \qquad \operatorname{div}\overline{B} = 0, \qquad \overline{B} = \mu_0\overline{H};$$

K_0 et μ_0 étant les valeurs des constantes K et μ pour le vide.

Dans le système électromagnétique, on pose $\mu_0 = 1$ et l'on sait qu'on peut alors écrire $K_0 = \frac{1}{v^2}$ en appelant v la vitesse de propagation des ondulations électromagnétiques.

Nature axiale ou polaire des vecteurs électrique et magnétique.

Remarquons que la seconde relation, celle qui exprime la loi de l'induction, confirme cette constatation, qui ressort déjà de la première équation, que les deux vecteurs $\overline{E}$ et $\overline{H}$ ne peuvent être tous deux des vecteurs polaires ou tous deux des vecteurs axiaux.

Cette remarque permet de déterminer leur vraie nature.

Le phénomène de Hall permet de trancher la question de savoir si c'est le champ électrique qui est un vecteur polaire et le champ magnétique un vecteur axial ou si c'est l'inverse. D'après les équations du champ électrodynamique, si l'on rapporte les vecteurs à une même origine, la vitesse de chacun de ces vecteurs, qui est un vecteur de même nature que le vecteur lui-même, étant représenté par le rotationnel de l'autre, il est certain qu'ils ne sont pas de la même nature; mais, si nous avons considéré jusqu'ici que le champ élec-

Digitized by Google

trique était un vecteur polaire, c'est parce que la relation

$$\frac{K\overline{E}}{4\pi} = \overline{D} \tag{1}$$

nous le faisait concevoir comme un vecteur de même nature que le déplacement $\overline{D}$ et un déplacement est un vecteur polaire.

On pourrait cependant considérer le vecteur $\overline{D}$ comme l'axe du tourbillon de quelque fluide.

Le phénomène de Hall s'oppose à cette interprétation.

Faisons d'abord la remarque suivante :

1° Le produit vectoriel d'un vecteur polaire par un vecteur polaire est un vecteur axial; ceci résulte de la considération directe de la symétrie d'un système de deux vecteurs ayant même origine.

2° Le produit vectoriel d'un vecteur polaire par un vecteur axial ou inversement est un vecteur polaire, cela résulte de la règle de calcul

$$\big[A\,[BC]\big] = B(AC) - C(AB) = -\big[[BC]\,A\big]$$

qui montre que le produit a même symétrie que les vecteurs polaires B et C.

3° Le produit vectoriel de deux vecteurs axiaux est un vecteur polaire; car si A′, B′ sont ces vecteurs, on peut poser

$$A' = [BC], \qquad B' = [CA] \qquad \text{et} \qquad C' = [AB],$$

A, B, C étant des vecteurs polaires et l'on a, comme il serait aisé de le vérifier,

$$[A'B']\,(ABC) = (A'B'C')C,$$

(ABC) et A′B′C′ désignant la mesure algébrique des parallélépipèdes construits sur A, B, C et A′, B′, C′ respectivement, ce qui montre que le produit vectoriel considéré a la symétrie d'un vecteur polaire C.

Or la force électromotrice $\overline{E}$ décelée par l'effet Hall peut se représenter par la formule géométrique ci-après, où k' est une constante scalaire et ε l'épaisseur de la lame dans la direction de champ magnétique :

$$\overline{E} = \frac{k'}{\varepsilon}\,\big[\overline{I}\,\overline{H}\big], \tag{105}$$

$\overline{I}$ étant le vecteur courant et $\overline{H}$ le vecteur magnétique. Le vecteur

Digitized by Google

courant, en vertu de la proportionnalité avec le champ électrique qui résulte de la loi d'Ohm, est de même nature que celui-ci, et, par suite, $\overline{\mathrm{I}}$ et $\overline{\mathrm{H}}$ sont de natures différentes, donc $\overline{\mathrm{E}}$ est un vecteur polaire; c'est donc $\overline{\mathrm{H}}$ qui est le vecteur axial.

Les considérations de symétrie que je viens d'exposer montrent qu'il ne faut pas prendre la règle du tire-bouchon de Maxwell comme une image correcte du champ électromagnétique. On serait tenté, d'après elle, d'attacher au champ le sens d'une hélice, le sens de progression du courant serait celui de l'axe de l'hélice, tandis que le champ magnétique serait figuré par la vitesse de circulation des éléments matériels de l'hélice autour de cet axe. En réalité, le champ magnétique ne doit pas être conçu comme une vitesse, mais sa représentation correcte est celle d'un tourbillon.

Des volutes, des anneaux de tourbillon entourent donc le champ électrique et ce sont ces anneaux de tourbillon qui doivent figurer à l'esprit l'état du champ magnétique. Chaque élément infiniment court d'un de ces petits anneaux se comporte comme un cylindre tournant. Précisons cette idée. Imaginons un cylindre de révolution en mouvement de rotation autour de son axe que je prends pour axe des z. Si ω est la vitesse de rotation, la vitesse d'un élément de coordonnées x, y (les axes étant un système trirectangulaire) sera donnée par les équations

$$(106)\qquad \begin{cases} v_y = \omega x \\ v_x = -\omega y \end{cases} \qquad (v_z = 0)$$

et l'on aura

$$(107)\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \omega,$$

de sorte que le long de chaque filet d'éléments parallèle à l'axe, il y a un tourbillon égal à ω dans toute la masse cylindrique en rotation, et l'axe du tourbillon est dirigé suivant le filet, c'est-à-dire parallèlement à l'axe.

Expression de l'énergie électrocinétique.

On peut avoir l'expression de l'énergie électrocinétique T en recourant à la formule (88), que l'on peut écrire :

$$(108)\qquad \mathrm{T} = \frac{1}{2}\Sigma p y'.$$

Digitized by Google

Or nous avions, en intégrant autour du circuit parcouru par le courant y' (98),

$$p = \int \left(A_1 \frac{dx_1}{ds} + A_2 \frac{dx_2}{ds} + A_3 \frac{dx_3}{ds} \right) ds.$$

Mais, si C_i sont les composantes du vecteur courant et si S est la section transversale du circuit conducteur, on peut écrire

$$y' \frac{dx_i}{ds} = C_i S. \tag{109}$$

Mais, si $d\varpi$ est l'élément de volume, on a

$$d\varpi = S\, ds, \tag{110}$$

d'où

$$T = \frac{1}{2} \iiint A_i C_i \, d\varpi \tag{111}$$

(en négligeant le signe Σ_i), l'intégration devant être étendue à toute partie de l'espace où il y a des courants électriques.

Substituons aux composantes C_i leurs valeurs (69) données en fonction du rotationnel du champ magnétique, il vient

$$T = \frac{1}{8\pi} \iiint \left[A_1 \left(\frac{\partial H_3}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_3} \right) + A_2 \left(\frac{\partial H_1}{\partial x_3} - \frac{\partial H_3}{\partial x_1} \right) + A_3 \left(\frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \right) \right] d\varpi, \tag{112}$$

l'intégration étant étendue à une portion de l'espace enveloppant tous les courants.

Si nous intégrons par parties, en nous rappelant qu'à une grande distance du système le champ magnétique est de l'ordre de grandeur de l'inverse du cube de la distance, ce qui fait évanouir les intégrales de surface relatives à la limite du champ, nous trouvons, en étendant l'intégration à l'espace entier, que l'expression se réduit à

$$T = \frac{1}{8\pi} \iiint \left[H_1 \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) + H_2 \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) + H_3 \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) \right] d\varpi. \tag{113}$$

Si nous écrivions H_{23}, H_{31}, H_{12} pour H_1, H_2, H_3, afin de marquer le caractère de vecteur axial de H, nous pourrions écrire plus simple-

Digitized by Google

ment, en sous-entendant le signe Σ,

$$T = \frac{1}{8\pi}\iiint H_{ij}\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right) d\varpi, \tag{114}$$

ou, d'après la formule (97), qui donne l'induction magnétique en fonction du rotationnel du potentiel vecteur :

$$T = \frac{1}{8\pi}\iiint (\overline{H}\,\overline{B})\, d\varpi, \tag{115}$$

$(\overline{H}\,\overline{B})$ indiquant le produit scalaire $H_1B_1 + H_2B_2 + H_3B_3$ des deux vecteurs $\overline{H}$ et $\overline{B}$. Cette expression était fondamentale aux yeux de Maxwell.

Dans le cas où le milieu est polarisable, nous avons

$$\overline{B} = \mu\overline{H}, \tag{116}$$

μ étant la perméabilité magnétique. Dans le système électromagnétique on prend pour unité la valeur μ_0 de μ dans le vide, et il reste

$$T = \iiint \frac{(\overline{H}^2)}{8\pi}\, d\varpi. \tag{117}$$

Tels sont les résultats essentiels que l'on obtient en considérant les phénomènes du champ électrique comme susceptibles de recevoir une interprétation mécanique.

Digitized by Google

CHAPITRE II.

APPLICATION DU PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

Cette conception mécanique des phénomènes électriques facilite l'établissement des équations des problèmes de distribution du courant, quand on a affaire à des réseaux de conducteurs plus ou moins complexes, comprenant à la fois des bobines et des condensateurs.

Les variables électriques sont, conformément à la théorie de Maxwell, les quantités d'électricité qui ont traversé, depuis l'origine des temps, une section donnée de chaque conducteur.

Comme une quantité δy d'électricité qui traverse une source de force électromotrice E donne lieu à la production d'un travail $E\,\delta y$ de la part de cette source, travail qui est emprunté, par exemple, à son énergie chimique, E agit par rapport à la variable y comme une force généralisée; E est la force, δy le déplacement.

De même, la chaleur de Joule se traduit par un dégagement d'énergie, égal à $Ry' \times y'\,dt$ pendant le temps dt, c'est-à-dire que, puisque $y'\,dt$ n'est autre que la quantité d'électricité qui passe dans le circuit pendant le temps dt, le terme Ry' représente une force de viscosité qui résiste au passage de la quantité δy. On peut donc dire que l'on a une force résistante égale à $-Ry'$.

Cela étant, considérons, pour simplifier, un circuit oscillant. Il comprend un condensateur de capacité C et une bobine dont le coefficient de self-induction est L.

L'énergie électrique $\frac{y^2}{2C}$ du condensateur est, pour nous, de l'énergie élastique; la réaction élastique est donc

$$-\frac{y}{C}.$$

L'énergie magnétique $\frac{1}{2}Ly'^2$ de la bobine est, pour nous, de

Digitized by Google

l'énergie cinétique; la quantité de mouvement est Ly' et la force d'inertie est $-Ly''$.

Le principe des vitesses virtuelles appliquées au circuit nous donne donc :

$$\delta y'\left(-Ly''-Ry'-\frac{y}{C}+E\right)=0.$$

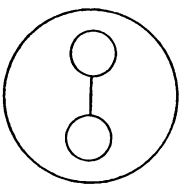
On obtient donc ainsi, de la façon la plus simple, l'équation fondamentale

$$Ly''+Ry'+\frac{y}{C}=E.$$

Il serait tout aussi facile de traiter des cas plus compliqués. Il suffirait de commencer par évaluer avec soin l'énergie élastique et l'énergie cinétique, et de tenir compte des équations de condition qui relient entre elles les variables indépendantes.

Si, par exemple, deux conducteurs sont contenus à l'intérieur d'un

Fig. 4.



troisième et si l'on appelle y_1, y_2, y_3 les charges des deux conducteurs et celle de la surface interne de l'enveloppe, on aura

$$y_1+y_2+y_3=0.$$

De même, si d'un point P partent trois conducteurs linéaires parcourus par des courants, l'équation de Kirchhoff relative au sommet P, laquelle n'est qu'un aspect de l'équation de continuité, donnera entre les quantités y la relation $\Sigma y=0$, parce que la capacité propre de ce sommet est nulle.

On peut ainsi s'arranger de façon à ne laisser subsister que des variables y indépendantes et les équations de Lagrange s'écrivent immédiatement.

Digitized by Google

Équations de Kirchhoff.

Avant de passer à des cas plus compliqués, examinons, tout d'abord, les équations qu'on obtient lorsque le réseau envisagé est un réseau de Kirchhoff de la nature la plus simple, les branches étant constituées par des conducteurs métalliques de dimensions négligeables, coupées par des sources de force électromotrice données.

Considérons une branche quelconque A_1A_2 de résistance r parcourue par un courant y' et contenant une force électromotrice E comptée positivement comme y' dans le sens A_1A_2. Rattachons A_1 et A_2 aux deux plateaux d'un électromètre de capacité négligeable, nous mesurerons ainsi la différence de potentiel $V_1 - V_2$ des points A_1 et A_2. Cette différence de potentiel donne lieu à une réaction élastique $-(V_1 - V_2)$. Et, par suite, le régime permanent étant établi, on aura à écrire que la force agissante E, la force de viscosité $-Ry'$ et la force élastique $-(V_1 - V_2)$ se font équilibre; d'où

$$E - Ry' - (V_1 - V_2) = 0. \tag{121}$$

Si nous multiplions toutes les équations analogues relatives aux diverses branches du réseau par les déplacements virtuels δy correspondants, compatibles avec les liaisons du système, nous aurons

$$\Sigma(E - Ry')\,\delta y = 0. \tag{122}$$

Car on a, évidemment,

$$\Sigma(V_1 - V_2)\,\delta y = 0. \tag{123}$$

Et, en effet, cette somme représenterait l'augmentation virtuelle de l'énergie élastique; mais, comme il n'y a pas de condensateurs, cette énergie est négligeable.

Ou encore, si l'on considère les variables y, il est clair qu'elles ne sont pas indépendantes, car, à un sommet, par exemple, on a

$$\Sigma y' = 0, \tag{124}$$

ou, en multipliant par un accroissement virtuel du temps,

$$\Sigma\,\delta y = 0. \tag{125}$$

Donc, dans (123), chaque V a un coefficient nul.

Digitized by Google

Si on ne laisse subsister que les variables indépendantes, en exprimant toutes les autres en fonction de celles-là et qu'on annule dans (122) les coefficients des δy restants, on aura les équations du réseau en nombre égal au nombre des inconnues; on élimine ainsi les équations surabondantes qui sont fournies par les lois de Kirchhoff.

Analogie mécanique des équations de Kirchhoff.

Au point de vue purement analytique, il convient de remarquer l'analogie des équations (122) avec celles du mouvement d'un système matériel soumis à des percussions données. Si P_1, Q_1, R_1 sont les composantes de la percussion agissant sur un premier point matériel de masse m et si x'_1, y'_1, z'_1 sont les composantes de la vitesse instantanée communiquée à ce point, les composantes de la force instantanée égales à $P_1 - mx'_1$, $Q_1 - my'_1$, $R_1 - mz'_1$, ainsi que les forces analogues envisagées pour les divers éléments, doivent laisser le système en équilibre et l'on obtient

$$\Sigma[(P - mx')\delta x + (Q - my')\delta y + (R - mz')\delta z] = 0, \tag{126}$$

où δx, δy, δz sont les composantes d'un déplacement virtuel compatible avec les liaisons.

Mais, comme des déplacements infiniment petits possibles sont simplement proportionnels aux vitesses possibles dans la même direction, on peut, au lieu de l'équation (126), écrire

$$\Sigma[(P - mx')u + (Q - my')v + (R - mz')w] = 0, \tag{127}$$

équation dans laquelle u, v, w désignent les composantes possibles quelconques de la vitesse de l'élément m, ...

On a actuellement un cas particulier de cette équation, en posant u, v, w égaux aux vitesses x', y', z' véritablement reçues. Si donc on prend la demi-somme, on a

$$\Sigma\left(P\frac{1}{2}x' + Q\frac{1}{2}y' + R\frac{1}{2}z'\right) = T, \tag{128}$$

où T désigne l'énergie cinétique du mouvement produit, en partant du repos pour arriver à l'état de mouvement considéré. Dans le cas d'un système de conducteurs, nous pouvons refaire le même calcul, pour évaluer l'énergie en jeu dans l'état de régime; les forces électro-

Digitized by Google

motrices jouent le rôle de P, Q, R et les courants celui de x', y', z', mais nous n'avons plus besoin de multiplier par $\frac{1}{2}$. Et nous énoncerons la conclusion :

$$\Sigma E y' = \Sigma R y'^2, \tag{129}$$

c'est-à-dire l'énergie chimique des piles utilisées pendant l'unité de temps, en un mot la puissance des sources, s'est dissipée sous forme de chaleur conformément à la loi de Joule.

Autres analogies avec la théorie des impulsions.

Voici un théorème de Bertrand cité par Thomson et Tait qui paraît aussi directement transposable :

Soient ξ', η', ζ', etc. les composantes de vitesse d'un mouvement quelconque satisfaisant à l'équation (128), tandis que x', y', z' se rapportent au mouvement réel. Cette équation se transforme en

$$\frac{1}{2}\Sigma(P\xi' + Q\eta' + R\zeta') = T' = \frac{1}{2}\Sigma m(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2). \tag{129 bis}$$

Posons alors

$$x'_1 - \xi'_1 = u, \qquad y'_1 - \eta'_1 = v, \qquad z'_1 - \zeta'_1 = w, \qquad \ldots.$$

Nous avons, en éliminant ξ', η', ζ' :

$$\begin{cases} T - T' = \frac{1}{2}\Sigma[m(2x' - u)u + \ldots], \\ T - T' = \Sigma m(x'u + y'v + z'w) - \frac{1}{2}\Sigma m(u^2 + v^2 + w^2). \end{cases} \tag{130}$$

Mais, d'après (127), on a

$$\Sigma m(x'u + y'v + z'w) = \Sigma(Pu + Qv + Rw),$$

et, d'après (128) et (129 *bis*),

$$\Sigma(Pu + Qv + Rw) = 2T - 2T';$$

donc (130) donne

$$T - T' = \frac{1}{2}\Sigma m(u^2 + v^2 + w^2). \tag{131}$$

Digitized by Google

Par cette équation (131), Bertrand a montré que l'énergie cinétique effectivement communiquée au système T est un maximum et qu'elle surpasse l'énergie cinétique T′ de tout autre mouvement satisfaisant aux équations de liaison, la grandeur de cet excès étant égale à l'énergie du mouvement qu'il faudrait ajouter à l'un des deux mouvements pour produire l'autre.

Nous en conclurons que, dans le fonctionnement réel d'un réseau soumis à des forces électromotrices constantes, une fois le régime permanent établi, le travail fourni par les sources est plus grand que le travail qui serait fourni par elles dans n'importe quelle autre distribution des courants, compatible avec les conditions de liaison, c'est-à-dire avec l'incompressibilité du fluide électrique exprimée par les équations de Kirchhoff relatives aux sommets, et l'excès de travail ainsi fourni est égal à la chaleur qui serait dégagée conformément à la loi de Joule dans le réseau, si celui-ci était parcouru par des courants dont les intensités seraient la différence entre les intensités réelles et les intensités de la distribution supposée.

L'étude du mouvement d'un système matériel à liaison sous l'action d'impulsions données conduit à écrire pour les composantes des impulsions $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ correspondant aux diverses variables $\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \ldots$ les équations (1)

$$\xi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}, \qquad \ldots \tag{132}$$

et pour les composantes $\dot{\psi}', \dot{\varphi}', \dot{\theta}', \ldots$ des vitesses correspondant aux impulsions ξ, η, ζ, les équations

$$\dot{\psi}' = \frac{\partial T}{\partial \xi}, \qquad \ldots \tag{133}$$

Tous ces théorèmes, ainsi que ceux de réciprocité, sont directement transposables dans la théorie de l'électricité; les paragraphes 313 à 316 de *Natural Philosophy* de Thomson et Tait sont relatifs au mouvement des systèmes matériels sollicités par des impulsions; les théorèmes sont analogues, dans leur forme, à ceux que Maxwell a donnés pour les corps conducteurs soumis dans le champ électrostatique à leur influence réciproque et, comme en somme il s'agit toujours de relations linéaires, ici entre les impulsions et les vitesses,

(1) Ces variables ξ, η, ζ n'ont pas de rapport avec celles du paragraphe précédent.

Digitized by Google

là entre les potentiels et les charges ou encore entre les forces électromotrices et les courants, on obtient toujours les mêmes lois : le demi-produit d'une impulsion par une vitesse représente de l'énergie cinétique; le demi-produit d'une charge par un potentiel représente de l'énergie potentielle; le produit d'une force électromotrice par un courant représente une puissance calorifique. Les diverses interprétations se prêtent donc un mutuel appui.

Quantité de mouvement électromagnétique.

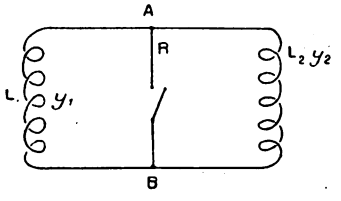
Mais si l'on passe à la théorie de l'électromagnétisme, il y a plus qu'une simple analogie. Si, conformément aux idées de Maxwell, on envisage l'énergie magnétique d'un système de courants comme l'énergie cinétique d'un mécanisme caché, l'expression (96) nous fait considérer le flux embrassé par un circuit comme la quantité de mouvement, disons de l'éther, relative à ce circuit.

De nouveau, nous pourrons transposer dans le langage de l'électrodynamique les théorèmes relatifs au choc.

En particulier, si dans un réseau de conducteurs métalliques de section négligeable, on établit ou supprime des branchements par le jeu des commutateurs, il résultera de ces manœuvres des chocs intérieurs, si elles sont faites instantanément, et l'on pourra appliquer les théorèmes ordinaires de la Mécanique. Les réactions étant intérieures, la quantité de mouvement se conserve. L'inertie électromagnétique se manifeste par cette propriété que les bobines qui sont équivalentes à des aimants exigent un certain temps pour se désaimanter.

Considérons, par exemple, deux bobines ayant pour coefficients

Fig. 5.



de self-induction L_1 et L_2 parcourues par des courants y'_1 et y'_2, les extrémités A et B de ces bobines étant reliées, comme l'indique la figure ci-dessus, par un conducteur de résistance R. Si l'on vient à

Digitized by Google

ouvrir cette branche AB, le courant deviendra Y′ dans le circuit désormais commun des deux bobines et l'on aura, d'après le principe de la conservation de la quantité de mouvement,

$$L_1 y'_1 + L_2 y'_2 = (L_1 + L_2) Y'. \tag{134}$$

L'énergie cinétique avant le choc est

$$\frac{1}{2} L_1 y'^2_1 + \frac{1}{2} L_2 y'^2_2;$$

L'énergie cinétique après le choc est

$$\frac{1}{2} (L_1 + L_2) Y'^2.$$

Mais le problème est le même que celui du choc direct de deux sphères si celles-ci avaient les masses L_1 et L_2 et les vitesses y'_1 et y'_2 et qu'après le choc, les deux sphères fussent accrochées l'une à l'autre de façon à se mouvoir ensuite avec la vitesse commune Y′.

On a alors

$$\frac{1}{2} L_1 y'^2_1 + \frac{1}{2} L_2 y'^2_2 - \frac{1}{2} (L_1 + L_2) Y'^2 = \frac{1}{2} L (y'_1 - y'_2)^2 \tag{135}$$

en posant

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}. \tag{136}$$

Ainsi donc, l'énergie cinétique perdue est égale à l'énergie cinétique d'un circuit qui serait parcouru par un courant égal à celui qui parcourrait la branche R supprimée et dont le coefficient de self-induction serait le double de la moyenne harmonique des deux coefficients de self-induction des deux bobines qui se déchargent l'une sur l'autre.

Les conclusions auxquelles nous arrivons ne sont d'ailleurs valables que si nous pouvons faire abstraction des phénomènes de frottement, c'est-à-dire des résistances des bobines.

D'une façon générale, soient T l'énergie cinétique et p_i la quantité de mouvement relative à la variable y_i, on aura

$$T = \frac{1}{2} \Sigma p_i y'_i. \tag{137}$$

Digitized by Google

Si, à un moment postérieur t, p_i et y'_i prennent les valeurs P_i et Y'_i, on aura, pour l'énergie T_1,

$$T_1 = \frac{1}{2} \Sigma P_i Y'_i \tag{138}$$

et, en supprimant les indices pour simplifier l'écriture,

$$T - T_1 = \Sigma (p - P) \frac{y' + Y'}{2} - \frac{1}{2} \Sigma (p Y' - P y').$$

Or, d'après les propriétés de la polaire, on a

$$\Sigma Y' \frac{\partial T}{\partial y'} = \Sigma y' \frac{\partial T}{\partial Y'}, \tag{139}$$

c'est-à-dire

$$\Sigma p Y' = \Sigma y' P. \tag{140}$$

Il reste donc

$$T - T_1 = \Sigma (p - P) \frac{y' + Y'}{2}. \tag{141}$$

Si nous appliquons la formule générale (141) au cas des deux circuits que nous venons d'imaginer, nous aurons la relation

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} L_1 y'^2_1 + \frac{1}{2} L_2 y'^2_2 - \frac{1}{2} (L_1 + L_2) Y'^2 \\ &\quad = L_1 (y'_1 - Y'_1) \frac{y'_1 + Y'_1}{2} + L_2 (y'_2 - Y'_2) \frac{y'_2 + Y'_2}{2}, \end{aligned} \tag{142}$$

ce qui est une identité évidente. Nous obtenons ainsi une vérification.

En supposant que $p - P$ soit infiniment petit, la formule (141) donne

$$\delta T = \Sigma y' \delta p \tag{143}$$

et l'on obtiendrait de même

$$\delta T = \Sigma p \delta y'. \tag{144}$$

Si donc on exprime T en fonctions des variables indépendantes y', qui subsistent après qu'on a tenu compte des liaisons, il vient d'une façon générale

$$y' = \frac{\partial T}{\partial p} \quad \text{et} \quad p = \frac{\partial T}{\partial y'}. \tag{145}$$

Digitized by Google

Dans la première équation (145), l'énergie cinétique est exprimée en fonction des intensités des courants; dans la seconde, elle est supposée exprimée en fonction des flux d'induction.

Ces équations ne sont autre chose que les équations (132) et (133) de la mécanique ordinaire.

Énergies perdues dans le choc.

L'équation (141) exprime le théorème suivant :

« Lorsque, par suite d'un choc, un système passe d'un état à un autre, la variation d'énergie a pour mesure la somme des produits des impulsions subies pendant le choc par les vitesses moyennes correspondantes, en entendant par vitesse moyenne la demi-somme des vitesses avant et après le choc. »

De même, l'énergie magnétique subit une variation quand on ouvre ou ferme des circuits, et la variation est égale à la somme des produits qu'on obtient en multipliant la variation du flux de chaque circuit par l'intensité moyenne du courant correspondant, avant et après le choc.

Quand il s'agit de deux sphères qui viennent se choquer pour ne plus se quitter, comme deux wagons qui viendraient s'atteler automatiquement, on a une vue très claire de l'énergie perdue, c'est celle qui est dissipée dans les vibrations élastiques, lesquelles s'amortissent peu à peu en se transformant en chaleur. Il en est de même dans le cas des circuits électriques. C'est ce qui explique l'étincelle d'extra-courant.

Ce n'est pas l'énergie magnétique qui se transforme directement sous forme de chaleur, puisque nous ne supposons pas que le milieu soit le siège de phénomènes d'hystérésis, mais elle passe tout d'abord à l'état d'énergie électrique et se consume sous forme de chaleur, conformément à la loi de Joule, par suite de la viscosité du milieu conducteur métallique ou gazeux.

Cette énergie a été primitivement empruntée aux sources galvaniques ou autres lors de l'établissement des courants électriques.

Modification d'un réseau de Kirchhoff.

Des considérations analogues s'appliqueraient à la chaleur J, dégagée conformément à la loi de Joule, laquelle est égale à la puis-

Digitized by Google

sance fournie par les sources. On a donc

$$J = \Sigma r y'^2 = \Sigma E y', \tag{146}$$

tandis que nous avions

$$T = \frac{1}{2} \Sigma p y'. \tag{147}$$

La puissance $\frac{1}{2} J$ sera l'analogue de T et la force électromotrice l'analogue de p; il faudra tenir compte de la présence de ce facteur $\frac{1}{2}$. Et l'on aura

$$E = \frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial y'} \quad \text{et} \quad y' = \frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial E}. \tag{148}$$

Dans le premier cas, la chaleur de Joule est exprimée en fonction des intensités et, dans le second, en fonction des forces électromotrices. Dans les deux hypothèses, on suppose qu'on a tenu compte des liaisons, de sorte que les E ou les y' respectivement doivent être regardées comme des variables indépendantes.

Variation d'énergie par suppression d'une branche.

Considérons un système de conducteurs linéaires et une branche de résistance r qui réunit deux points A et B.

Formons le tableau des intensités et des forces électromotrices indépendantes, nous pouvons toujours faire ce choix de façon que l'une des variables indépendantes soit le courant i qui circule de A vers B dans la résistance r. On a ainsi

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} i, & I', & I'', & I''', \\ e, & E', & E'', & E'''. \end{cases}$$

Supprimons la branche AB, les intensités seront modifiées et il y aura entre les points A et B la différence de potentiel $V_A - V_B$. Nous aurons le même résultat si, sans supprimer la branche AB, nous y intercalons une force électromotrice en opposition égale à $V_A - V_B$. Les intensités nouvelles étant désignées par de petites lettres, nous aurons le tableau

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} 0 & i', & i'', & i''', \\ e - (V_A - V_B), & E', & E'', & E'''. \end{cases}$$

Digitized by Google

On aura un état du réseau compatible avec les liaisons si l'on superpose à ce dernier état celui qu'on obtient en changeant de signes les forces électromotrices dans le premier état. Ceci résulte du caractère linéaire des équations. Cet état inversé est représenté par le Tableau (III) :

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} -i, & -\mathrm{I}', & -\mathrm{I}'', & -\mathrm{I}''', \\ -e, & -\mathrm{E}', & -\mathrm{E}'', & -\mathrm{E}''', \end{cases}$$

et l'état résultant est représenté par le Tableau (IV) :

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} -i, & i'-\mathrm{I}', & i''-\mathrm{I}'', & i'''-\mathrm{I}''', \\ -(\mathrm{V_A}-\mathrm{V_B}), & 0, & 0, & 0, \end{cases}$$

La puissance calorifique dans l'état figuré par le Tableau (IV) est

$$\mathrm{J}_4 = i(\mathrm{V_A}-\mathrm{V_B}).$$

Mais, d'autre part, soient J_1 la puissance calorifique dans l'état (I) et J_2 la puissance calorifique dans l'état (II), on aura

$$\text{(149)} \qquad \mathrm{J}_1 = ei + \mathrm{E}'\mathrm{I}' + \mathrm{E}''\mathrm{I}'' + \mathrm{E}'''\mathrm{I}''',$$

$$\text{(150)} \qquad \mathrm{J}_2 = \mathrm{E}'i' + \mathrm{E}''i'' + \mathrm{E}'''i''';$$

d'où

$$\text{(151)} \qquad \mathrm{J}_2 - \mathrm{J}_1 = e(-i) + \mathrm{E}'(i'-\mathrm{I}') + \mathrm{E}''(i''-\mathrm{I}'') + \mathrm{E}'''(i'''-\mathrm{I}''').$$

Ceci représente la somme des produits des forces électromotrices de l'état (I) par les intensités correspondantes de l'état (IV). On doit obtenir le même résultat, en faisant la somme des produits des intensités dans l'état (I) par les forces électromotrices correspondantes de l'état (IV). Nous démontrerons cette propriété dans un instant.

On a ainsi

$$\text{(152)} \qquad \mathrm{J}_2 - \mathrm{J}_1 = i\left[-(\mathrm{V_A}-\mathrm{V_B})\right].$$

Donc la diminution de puissance calorifique $\mathrm{J}_1 - \mathrm{J}_2$ est égale à la puissance calorifique qui serait constatée dans la branche r sous l'action d'une différence de potentiel $\mathrm{V_A} - \mathrm{V_B}$ égale à celle qui s'établit, après la suppression de cette branche, entre les deux points qu'elle reliait.

Il est remarquable, en outre, qu'on ait

$$\text{(153)} \qquad \mathrm{J}_1 - \mathrm{J}_2 = \mathrm{J}_4,$$

Digitized by Google

J_1 étant la puissance calorifique du réseau sous l'action d'une force électromotrice unique placée dans la branche r et égale à la différence de potentiel $V_A - V_B$.

La propriété annoncée sur laquelle je viens de m'appuyer a son analogue dans la mécanique des systèmes à liaison.

Après les explications qui ont été déjà fournies, il est évident qu'il suffit de faire la démonstration pour les systèmes mécaniques, l'application à l'électricité est ensuite immédiate.

La proposition s'énonce ainsi :

Désignons par les indices 1 et 2 deux états d'un système à liaison; soient dans le premier état p_1 et y'_1 les quantités de mouvement et les vitesses, et p_2 et y'_2 les quantités de mouvement et les vitesses dans le second état. On aura en étendant la sommation aux quantités qui se rapportent à toutes les variables indépendantes

$$\Sigma p_2 y'_1 = \Sigma p_1 y'_2. \tag{154}$$

Il suffit pour le démontrer de considérer un troisième état intermédiaire où l'on aurait

$$y' = y_1 + n(y'_2 - y_1), \qquad p = p_1 + n(p_2 - p_1), \tag{155}$$

la fraction n variant de 0 à 1. Les quantités p et y' sont compatibles avec les liaisons.

Appliquons la formule

$$\int d\mathrm{T} = \int_0^1 dp\, y'. \tag{156}$$

Il vient

$$\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1 = \Sigma \int_0^1 [y'_1 + n(y'_2 - y'_1)](p_2 - p_1)\, dn \tag{157}$$

ou

$$\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1 = \frac{1}{2}\Sigma y'_2 p_2 - \frac{1}{2}\Sigma y'_1 p_1 + \frac{1}{2}(\Sigma y'_1 p_2 - \Sigma y'_2 p_1). \tag{158}$$

Comme on a

$$\mathrm{T}_2 = \frac{1}{2}\Sigma y'_2 p_2, \qquad \mathrm{T}_1 = \frac{1}{2}\Sigma y'_1 p_1; \tag{159}$$

l'expression entre parenthèses est nulle, ce qui démontre la proposition annoncée (équation 154).

Digitized by Google

CHAPITRE III.

ANALOGIE HYDRODYNAMIQUE.

Analogies hydrodynamiques de l'électrostatique. Sphères pulsantes de Bjerknes.

Je me propose maintenant de donner la théorie des sphères pulsantes de Bjerknes; ces sphères sont constituées par une membrane élastique gonflée par un gaz auquel on fait subir des variations de pression très rapides; des moyens appropriés permettent de faire varier la différence de phase du mouvement pulsatoire des sphères. Ces sphères sont placées dans un liquide incompressible au repos et l'on constate qu'il y a, au signe près, imitation des phénomènes d'attraction et de répulsion électriques. Les deux sphères se repoussent en raison inverse du carré de la distance quand les variations de leurs pressions intérieures sont en opposition de phase et elles s'attirent suivant la même loi, quand ces variations sont concordantes.

Cherchons tout d'abord comment s'attirent deux petites sphères électrisées.

Pour avoir l'expression de l'action de l'une des sphères sur l'autre, il suffit de considérer l'expression de l'énergie électrique du milieu. Soient q_1 et q_2 les quantités d'électricité portées par les deux sphères et soit w l'énergie en question; son expression est de la forme

$$W = A_1 q_1^2 + A_2 q_2^2 + 2 A_{12} q_1 q_2. \tag{160}$$

Les coefficients A_1, A_2, A_{12} sont des fonctions de la distance c des deux sphères.

Supposons la sphère (1) fixe et appliquons à la sphère (2) une force F dirigée du centre de 1 vers le centre de 2. Si cette force agit pendant que c augmente de dc, le travail extérieur effectué sur le système sera $F\,dc$ et, comme il n'y a pas d'autre énergie en jeu que

Digitized by Google

l'énergie élastique due au déplacement électrique, ce travail sert à augmenter ladite énergie, et l'on a

(161) $$F\,dc - dW = 0.$$

Donc la force — F qui s'exerce spontanément sur la sphère (2) par suite des réactions du champ sera égale à $-\frac{dW}{dc}$.

Il ne s'agit plus que de calculer W. Supposons pour simplifier que le pouvoir inducteur électrique K du milieu soit égal à l'unité; admettons que les sphères soient petites par rapport à la distance c de leurs centres. Si la première sphère était seule, son énergie serait, en appelant r_1 le rayon,

$$\frac{1}{2r_1}q_1^2, \qquad \text{d'où} \qquad A_2 = \frac{1}{r_2}.$$

On aurait de même pour la seconde sphère, r_2 étant son rayon, une énergie égale à

$$\frac{1}{2r_2}q_2^2, \qquad \text{d'où} \qquad A_2 = \frac{1}{r_2}.$$

Mais, quand les deux sphères sont en présence, à l'énergie des deux sphères isolées viennent s'ajouter des termes complémentaires. Nous devons avoir pour $-\frac{dW}{dc}$ l'expression $\frac{q_1 q_2}{c^2}$, donnée approximativement par les expériences de Coulomb; ce qui prouve que l'énergie doit être, en première approximation, de la forme

(162) $$W = \frac{1}{2r_1}q_1^2 + \frac{1}{2r_2}q_2^2 + \frac{1}{c}q_1 q_2.$$

Pour contrôler ce résultat, il convient de recourir à l'expression rigoureuse de l'énergie élastique du milieu, telle qu'elle est donnée par Maxwell, savoir :

(163) éq. (29) $$W = \iiint \frac{K(\overline{E}^2)}{8\pi}\,d\varpi.$$

Nous avons fait K = 1. Nous aurons donc pour le déplacement

(éq. 45) $$\overline{D} = \frac{\overline{E}}{4\pi} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{div}\overline{D} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{div}\overline{E} = 0.$$

Cette condition relative à la divergence exprime que le fluide con-

Digitized by Google

ducteur de Maxwell se comporte comme un fluide incompressible. D'autre part, la force électrique $\overline{E}$ dérive d'un potentiel V, de sorte que l'on a, en sous-entendant le signe Σ pour l'énergie W,

$$(163) \qquad W = \frac{1}{8\pi}\int\int\int \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_i}\,d\varpi \qquad (i = 1, 2, 3),$$

tandis que la condition d'incompressibilité devient $\Delta V = 0$.

Appliquons la formule d'Ostrogradski, qui est

$$(\text{éq. } 44) \qquad \int\int\int_U \operatorname{div}\overline{H}\,d\varpi = \int\int_S (\overline{H}\overline{\nu})\,dS.$$

Dans cette formule, $\overline{H}$ est un vecteur quelconque et $\overline{\nu}$ est le vecteur unité suivant la direction de la normale extérieure à la surface S qui enveloppe le volume U; la première intégration s'étend au volume U et l'élément de volume est $d\varpi$, la seconde s'étend à la surface S et l'élément de surface est dS.

Posons

$$H_i = V\frac{\partial V}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial H_i}{\partial x_i} = V\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} + \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (\Sigma \text{ sous-entendu}).$$

Il vient donc

$$(166) \qquad \int\int\int \frac{\partial H_i}{\partial x_i}\,d\varpi = \int\int\int V\Delta V\,d\varpi + \int\int\int \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 d\varpi = \int\int V\frac{dV}{dn}\,dS.$$

On a, en effet, $(\overline{H}\overline{\nu})$ étant le produit de $\overline{H}$ par $\overline{\nu}$,

$$(167) \qquad (\overline{H}\overline{\nu}) = H_i\nu_i = V\frac{\partial V}{\partial x_i}\nu_i = V\frac{dV}{dn} \qquad (\Sigma \text{ sous-entendu}),$$

dn étant l'élément de normale dirigée vers l'extérieur du volume d'intégration; d'où

$$\int\int_S (\overline{H}\overline{\nu})\,dS = \int\int V\frac{dV}{dn}\,dS.$$

La première intégrale triple en ΔV s'annule d'après l'équation (45); la seconde est égale à $8\pi W$, il reste donc

$$(168) \qquad W = \frac{1}{2}\int\int V\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn}\,dS.$$

On reconnaît dans le second membre la demi-somme des produits

Digitized by Google

des potentiels par les charges élémentaires $\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn}dS$ qui se trouvent sur chacun des éléments de surface.

Si nous avions envisagé l'énergie cinétique T d'un liquide incompressible de densité égale à l'unité, nous aurions eu à évaluer l'intégrale

$$2T = \int\int\int u_i u_i \, d\varpi \qquad (\Sigma \text{ sous-entendu}), \tag{169}$$

(u_1, u_2, u_3) étant les trois composantes de la vitesse. Plaçons-nous dans ce cas et supposons que le mouvement du liquide se fait sans tourbillon; on peut poser alors

$$u_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \tag{170}$$

φ étant la fonction de forces des vitesses. Comme le liquide est incompressible, nous avons encore (*cf.* éq. 164)

$$\Delta \varphi = 0 \tag{171}$$

et le même calcul que plus haut nous donne

$$T = \frac{1}{2}\int\int \varphi \frac{d\varphi}{dn} dS. \tag{172}$$

Je reviens aux sphères électrisées. Si la distance c est assez grande, on peut prendre approximativement pour potentiel en un point A

$$V_A = \frac{q_1}{\rho_1} + \frac{q_2}{\rho_2}, \tag{173}$$

ρ_1 étant la distance de A au centre O_1 de la première sphère et ρ_2 la distance au centre O_2 de la seconde. L'intégrale de surface (168) doit être étendue à la surface de la première sphère, à la surface de la seconde et à la surface d'une sphère de rayon ρ infiniment grand enveloppant tout le champ. Sur cette sphère, le potentiel V est de la forme $\frac{q_1+q_2}{\rho}$ et la force $\frac{dV}{dn}$ est de la forme $-\frac{q_1+q_2}{\rho^2}$, il en résulte que l'intégrale est infiniment petite avec $\frac{1}{\rho}$ et il suffit de considérer simplement les surfaces des deux sphères O_1 et O_2.

Occupons-nous de la sphère (1) et calculons $\frac{dV}{dn}$ en un point M de

Digitized by Google

cette sphère O_1. On a, en prenant la dérivée normale,

$$\frac{dV}{dn} = -\frac{q_1}{\rho_1^2}\frac{d\rho_1}{dn} - \frac{q_2}{\rho_2^2}\frac{d\rho_2}{dn}. \tag{174}$$

Soit α_1 l'angle formé par le rayon vecteur O_2M qui joint au point M le centre O_2 de la seconde sphère avec le rayon O_1M de la première sphère.

Comme l'élément de normale dn est dirigé vers l'extérieur du volume d'intégration, siège de l'énergie élastique, on a

$$dn = -d\rho_1, \qquad \rho_1 = r_1, \qquad dn\cos\alpha_1 = -d\rho_2 \tag{175}$$

et

$$\rho_2 = c(1+\varepsilon),$$

ε étant, puisque c est supposé très grand, infiniment petit.

Il vient donc

$$\frac{dV}{dn} = \frac{q_1}{r_1^2} + \frac{q_2}{\rho_2^2}\cos\alpha_1. \tag{176}$$

On a aussi, approximativement,

$$V = \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{c}. \tag{177}$$

Par suite, toujours pour la sphère O_1, dont j'appelle dS_1 l'élément de surface, j'aurai

$$\iint V\frac{dV}{dn}\,dS_1 = \int\int\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{c}\right)\left(\frac{q_1}{r_1^2} + \frac{q_2}{\rho_2^2}\cos\alpha_1\right)dS_1. \tag{178}$$

Effectuons la multiplication, l'élément à intégrer devient

$$\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{c}\right)\frac{q_1}{r_1^2}\,dS_1 + \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{c}\right)q_2\,\frac{\cos\alpha_1\,dS_1}{\rho_2^2}. \tag{179}$$

Soit $d\omega_2$ l'angle solide sous lequel de O_2 on voit dS_1, on aura

$$d\omega_2 = \frac{dS_1\cos\alpha_1}{\rho_2^2}, \tag{180}$$

et comme le point O_2 est extérieur à la sphère O_1, on a

$$\iint d\omega_2 = 0, \qquad \int\int dS_1 = 4\pi r_1^2 \tag{181-182}$$

Digitized by Google

et il reste

$$\int\int V\frac{dV}{dn}\,dS_1 = \frac{4\pi q_1^2}{r_1} + 4\pi\frac{q_1 q_2}{c}. \tag{183}$$

On obtiendrait, de même, pour la partie de l'intégrale double qui doit être étendue à la surface de la sphère O_2,

$$\int\int V\frac{dV}{dn}\,dS_2 = 4\pi\frac{q_2^2}{r_2} + 4\pi\frac{q_1 q_2}{c} \tag{184}$$

et, par suite,

$$W = \frac{1}{8\pi}\int\int V\frac{dV}{dn}\,dS = \frac{1}{2}\frac{q_1^2}{r_1} + \frac{1}{2}\frac{q_2^2}{r_2} + \frac{q_1 q_2}{c}. \tag{185}$$

L'expression (185) est bien conforme à l'expression (162). Elle pouvait d'ailleurs se déduire immédiatement de l'expression bien connue $\sum\frac{mm'}{r}$, donnée dans tous les cours, mais l'analogie hydrodynamique n'eût plus été mise en évidence comme le calcul suivant va le faire.

Envisageons maintenant les sphères de Bjerknes.

Le rayon r_1 de la sphère O_1 est variable avec le temps, soit r_1' sa dérivée par rapport au temps; soit de même r_2 le rayon de la sphère O_2, il est variable avec le temps, soit r_2' sa dérivée. Le mouvement étant pulsatoire, on peut imaginer, par exemple, que r_1 oscille de part et d'autre de la valeur a_1 et qu'on a

$$r_1 - a_1 = \sqrt{2}\,d_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \psi_1\right), \tag{186}$$

T étant la période et ψ_1 la phase. On pourrait poser, de même,

$$r_2 - a_2 = \sqrt{2}\,d_2 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \psi_2\right), \tag{187}$$

la période étant la même, mais la phase ψ_2 étant différente, d_1 et d_2 seraient les valeurs efficaces des amplitudes du mouvement pulsatoire.

A la surface de la sphère O_1, la vitesse du liquide doit avoir sa composante radiale égale à r_1'; à la surface de la sphère O_2, la vitesse du liquide doit aussi avoir, suivant le rayon de cette sphère, sa composante égale à r_2'.

On part du repos. Il n'y a pas alors de tourbillon; on sait qu'alors,

Digitized by Google

en l'absence de chocs, le mouvement doit continuer à être irrotationnel; il y a une fonction φ dont les vitesses dérivent. Il faudra satisfaire à l'équation d'incompressibilité du liquide

$$\Delta\varphi = 0 \tag{188}$$

et aux conditions imposées aux vitesses dans le voisinage des sphères.

La fonction φ

$$\varphi = \frac{q_1}{\rho_1} + \frac{q_2}{\rho_2}$$

satisfera à toutes les conditions, si nous choisissons convenablement q_1 et q_2; les variables ρ_1 et ρ_2 conservant la même signification que plus haut; ce sont encore les distances aux centres O_1 et O_2 du point A où l'on calcule la fonction φ.

La composante normale à la sphère O_1 de la vitesse du liquide est

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{q_1}{r_1^2} + \frac{q_2}{\rho_2^2}\cos\alpha_1. \tag{190}$$

Si je pose

$$q_1 = r_1^2 r_1', \qquad q_2 = r_2^2 r_2',$$

j'aurai, à la surface de la sphère O_1, très sensiblement

$$\frac{d\varphi}{dn} = r_1', \tag{191}$$

car le terme complémentaire est de l'ordre de $\frac{1}{\rho_2^2}$, quantité qui diffère très peu de $\frac{1}{c^2}$, dont la valeur est négligeable, puisque c est supposé très grand par rapport aux diverses quantités r_1, r_2, r_1', r_2'. Ainsi donc, le potentiel adopté satisfera approximativement à la condition à la surface pour la sphère O_1 et il en est de même, relativement à la sphère O_2. Dès lors, le calcul fait précédemment pour W peut être reproduit; il nous conduit ici à l'expression de l'énergie cinétique T du liquide, savoir, d'après (172) :

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\int\int \varphi \frac{d\varphi}{dn}\, d\mathrm{S} = 2\pi\left(r_1^3 r_1' + r_1^3 r_2' + 2\frac{r_1^2 r_2^2}{c} r_1' r_2'\right). \tag{192}$$

Les équations de Lagrange donnent pour la force extérieure X, qui équilibre les réactions intérieures du système :

$$\mathrm{X} = \frac{dp}{dt} - \frac{d\mathrm{T}}{dc}. \tag{193}$$

Digitized by Google

Elle se décompose en deux parties, l'une qui dépend de la variation dans le temps de la quantité de mouvement, l'autre qui résulte de la variation de l'énergie cinétique qui serait produite par une modification de la configuration du système.

On a d'ailleurs

$$p = \frac{\partial T}{\partial c'}. \tag{194}$$

Ceci nous amène à examiner de plus près comment T dépend de la vitesse relative des deux sphères suivant la droite O_1O_2. En général, on doit supposer que T dépend de cette vitesse, ce dont on tiendra compte en ajoutant à T des termes de la forme ci-après :

$$B_1 r'_1 c' + B_2 r'_2 c' + \frac{1}{2} C c'^2,$$

ce qui donne

$$p = B_1 r'_1 + B'_2 r'_2 + C c'. \tag{195}$$

Quand c' est nul, cette expression se réduit à

$$p = B_1 r'_1 + B_2 r'_2, \tag{196}$$

mais il suffit, pour que les termes complémentaires existent, que les deux sphères ne soient pas assujetties à rester à une distance c invariable; d'une manière générale, B_1 et B_2 doivent dépendre de a_1, a_2, valeurs moyennes de r_1 et r_2 et de c; mais on a

$$\frac{dp}{dt} = B_1 r''_1 + B_2 r''_2. \tag{197}$$

Les quantités r''_1 et r''_2 sont oscillatoires et elles n'influeront pas sur la valeur moyenne de X. Il restera donc, en mettant une barre pour indiquer une valeur moyenne,

$$\overline{X} = -\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial T}{\partial c}\,dt = -\frac{1}{T}\int_0^T \left(-\frac{1}{c^2}\right) r_1^2 r_2^2 r'_1 r'_2\,dt. \tag{198}$$

Or on a, d'après les expressions (186) et (187),

$$\frac{1}{T}\int_0^T r'_1 r'_2\,dt = d_1 d_2 \cos(\psi_1 - \psi_2); \tag{199}$$

Digitized by Google

d'où

$$\overline{X} = \frac{1}{c^2} r_1^2 r_2^2 d_1 d_2 \cos(\psi_1 - \psi_2), \tag{200}$$

La force hydrodynamique $\overline{Y}$, faisant équilibre à la force extérieure $\overline{X}$, est égale à

$$\overline{Y} = -\frac{1}{c^2} r_1^2 r_2^2 d_1 d_2 \cos(\psi_1 - \psi_2). \tag{201}$$

On imite donc les phénomènes électriques, puisque l'on arrive à une loi d'action en raison inverse du carré de la distance; mais en revanche, si la différence de phase est nulle ($\psi_1 = \psi_2$), les deux sphères pulsantes, étant alors assimilables à deux charges électriques de même nom, devraient se repousser, tandis qu'elles subissent une attraction, puisque $\overline{Y}$ est négatif. Cette différence de signe tient essentiellement à ce que, dans le problème électrique, l'énergie en cause est potentielle, tandis que, dans le problème hydrodynamique, elle est cinétique.

L'expression (162) de l'énergie élastique du milieu électrique n'est qu'approchée, parce que l'expression de la loi de Coulomb qui a été appliquée suppose que toute la charge de chaque sphère est condensée au centre de celle-ci, ce qui n'est rigoureux que pour une distribution superficielle uniforme; or tel n'est pas le cas, à cause de la modification de la distribution causée sur chaque sphère par l'influence de l'autre.

Quant à l'expression correspondante (192) de l'énergie cinétique du problème hydrodynamique, elle aussi n'est qu'approchée pour la raison qui a été déjà indiquée : en un point d'une sphère, la composante normale de la vitesse du liquide résultant du potentiel adopté n'est pas rigoureusement égale à la vitesse avec laquelle s'accroît le rayon de la sphère considérée.

Sphères pulsantes de Bjerknes : résumé.

En résumé, l'énergie électrostatique W a pour expression générale

$$W = \frac{1}{2} \Sigma QV,$$

V étant le potentiel de la charge Q.

Digitized by Google

Imaginons des corps conducteurs chargés placés en présence les uns des autres au sein d'un diélectrique, la charge d'un élément de surface $d\sigma$ sera

$$\frac{K}{4\pi}\frac{dV}{dn}d\sigma$$

et l'énergie sera

$$\frac{1}{2}\int\int V\frac{K}{4\pi}\frac{dV}{dn}d\sigma,$$

l'intégrale double étant étendue à la surface des conducteurs. L'intégrale devrait aussi être étendue à une surface enveloppe limitant le champ, mais on peut la supposer rejetée à l'infini et le potentiel étant une fonction régulière, cette partie de l'intégrale disparaît.

Or une transformation analytique simple donne pour W l'expression de Maxwell

$$W=\int\int\int\frac{K}{8\pi}\left(\frac{dV}{dn}\right)^2 d\varpi,$$

où l'intégration est étendue à tout le diélectrique.

Si l'on fait $K=1$ et qu'on applique cette formule à un système de deux petites sphères conductrices de rayons r_1 et r_2 petits par rapport à la distance c de leurs centres, on a

$$W=\frac{1}{2r_1}q_1^2+\frac{1}{2r_2}q_2^2+\frac{1}{c}q_1q_2,$$

q_1 et q_2 étant les charges des deux sphères.

L'expression de W sous forme d'une intégrale de volume est analogue à l'expression de l'énergie dynamique T d'un liquide, qu'on obtient en faisant la somme des forces vives $\frac{1}{2}mv^2$ de ses divers éléments m.

Dans le problème hydrodynamique des sphères pulsantes, nous avons aussi, en vertu du théorème de Lagrange, un potentiel des vitesses à calculer, si le liquide est sans viscosité et si le mouvement a été communiqué sans chocs.

Or ce potentiel φ est déterminé par les mêmes conditions que le potentiel V moyennant certaines correspondances.

L'équation indéfinie est la même : φ est une fonction harmonique en vertu de l'équation de continuité.

Digitized by Google

D'autre part, à la surface de chaque sphère, on a

$$\frac{d\varphi}{dn} = r'_1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\varphi}{dn} = r'_2.$$

De plus, il a suffi d'un travail fini pour mettre le liquide dans l'état de mouvement où il se trouve, donc la force vive est finie. Si l'intégrale

$$2T_1 = \int\int\int \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \right] dx\,dy\,dz$$

est finie, il en résulte que φ est une fonction régulière à l'infini.

Les conditions aux limites étant les mêmes pour φ et pour V, on a pour T_1 l'expression suivante :

$$T_1 = 2\pi \left(r_1^3 r_1'^2 + r_2^3 r_2'^2 + \frac{2 r_1^3 r_2^3}{c} r'_1 r'_2 \right),$$

ce sera l'expression de la force vive, si la densité est prise égale à un.

Si les deux sphères, au lieu d'être immobiles, sont animées de la vitesse relative c', la force vive devient

$$T = T_1 + B_1 r'_1 c' + B_2 r'_2 c' + \frac{1}{2} C c'^2.$$

Dans le problème électrostatique, si F est la force extérieure appliquée, comptée positivement dans le sens qui tend à accroître c, on a

$$F\,dc = dW,$$

de sorte que la réaction

$$-\frac{dW}{dc}$$

fait équilibre à F et représente l'action électrique d'une sphère sur l'autre.

Dans le problème hydrodynamique, la force appliquée F' est donnée par l'équation de Lagrange

$$F' = \frac{dp}{dt} - \frac{\partial T}{\partial c},$$

où p est la quantité de mouvement; les sphères étant au repos, on a

$$c' = 0,$$

et nous devons remplacer F' par sa valeur moyenne.

Digitized by Google

Dans ces conditions, on a

$$\overline{\frac{dp}{dt}} = 0.$$

Et il reste

$$\overline{F'} = -\frac{\overline{\partial T_1}}{\partial c}.$$

Or, par un choix convenable d'unités, on peut rendre identiques les expressions de $\overline{T_1}$ et de W.

Mais alors la réaction hydrodynamique $\frac{dT_1}{dc}$ est égale et de signe contraire à la réaction électrique $-\frac{dW}{dc}$.

Digitized by Google

CHAPITRE IV.

PETITES OSCILLATIONS.

Oscillations électriques.

C'est dans l'étude de la Télégraphie sans fil principalement que l'on peut trouver avantage à suivre de près l'analogie qui existe entre les phénomènes électriques et les phénomènes mécaniques. Il y a deux cas à considérer, celui où le système est conservatif et celui où les résistances sont le siège de dégagements de chaleur appréciables. La plupart du temps, cependant, les résistances sont assez faibles pour que l'on puisse s'aider, dans ce dernier cas, des solutions approximatives obtenues en négligeant cette cause de dissipation d'énergie.

Quand on peut négliger la chaleur de Joule, on est en présenee de deux énergies seulement de natures différentes, l'énergie élastique des champs électrostatiques et l'énergie cinétique des courants.

On considère, en première approximation et faute de mieux, les coefficients qui interviennent dans les expressions de ces énergies comme des constantes et l'on est alors en présence du problème de mécanique qui consiste à étudier les vibrations d'un système au voisinage d'une position d'équilibre.

Le système matériel S étant un système à k degrés de liberté soumis à des forces données qui dérivent d'une fonction de forces $V(q_1, \ldots, q_k)$, nous savons que si cette fonction de forces a un maximum pour la position S_0, cette position est position d'équilibre stable.

Il s'agit d'étudier les petits mouvements du système autour de cette position S_0, en admettant que toutes les liaisons ont lieu sans frottement.

Il est loisible de supposer que S_0 correspond aux valeurs $q_1 = q_2 = \ldots = q_k = 0$ des paramètres et que V est nul quand S est

Digitized by Google

en S_0. Développons les coordonnées x, y, z de chaque élément P de S suivant les puissances de $q_1, q_2, \ldots, q_k$.

Si n est le nombre des éléments P en lesquels on a décomposé S_0, nous avons à écrire $3n$ équations; supposons que, parmi ces $3n$ équations, il y en ait k, qui, réduites à leurs termes du premier degré, soient résolubles par rapport à $q_1, q_2, \ldots, q_k$. A chaque position de S voisine de S_0 correspond un système de valeurs de $q_1, q_2, \ldots, q_k$ voisines de zéro et un seul.

La fonction de forces V peut être développée suivant les puissances croissantes de $q_1, q_2, \ldots, q_k$, et les termes du premier degré manquent. L'ensemble des termes du second degré est une somme algébrique de k carrés en général distincts; ces carrés sont tous précédés du signe —, puisque V est maxima. Si, par surcroît, ils sont distincts, ces conditions suffisent pour que V ait un maximum en S_0.

Supposons que toutes les équations de liaison se réduisent aux termes linéaires et que la fonction de forces se réduise aux termes du second degré, le système S′ que l'on obtient ainsi est le système que l'on appelle le « système simplifié du système matériel S ».

C'est ce système simplifié qui est l'image des systèmes électriques que l'on a à considérer dans l'étude des circuits oscillants.

La mécanique apprend alors que le mouvement est la superposition de k mouvements fondamentaux ou mouvements périodiques de phase arbitraire et dont l'amplitude est arbitraire, pourvu qu'elle soit petite. Dans un même mouvement fondamental, la phase est la même pour toutes les variables.

Les périodes de ces mouvements fondamentaux sont dites « périodes fondamentales des oscillations de S autour de S_0 » ou simplement, pour abréger, « périodes fondamentales de S ». Les multiples des périodes fondamentales sont les périodes propres de S.

Si, à l'instant $t = 0$, on applique au système S en équilibre de petites percussions données, le petit mouvement ainsi engendré est là superposition de k mouvements fondamentaux de phase nulle.

Si, au même instant, on applique à S, en équilibre, deux systèmes de petites percussions données, le petit mouvement ainsi engendré est la superposition des deux petits mouvements qu'eût engendrés seul chaque système de percussions.

Si, à l'instant $t = 0$, on applique à S animé d'un petit mouvement de petites percussions données, le petit mouvement après le choc

Digitized by Google

est la superposition du petit mouvement primitif et du petit mouvement qu'eussent engendrés les mêmes percussions données appliquées à l'instant $t = 0$ aux mêmes éléments de S en équilibre.

S étant en équilibre en S_0 ou animé d'un petit mouvement, appliquons périodiquement à ses éléments les mêmes percussions données π (petites en valeur absolue). Si la période des percussions π est une période propre du système S, il est impossible en général que le mouvement reste petit.

Le synchronisme explique la vibration par l'air d'une corde sonore quand l'air vibre à l'unisson et seulement dans ce cas. Il explique l'absorption sélective des rayons lumineux et calorifiques par les milieux capables d'émettre des rayons de même longueur d'onde.

Il y a certains théorèmes de Mécanique dont l'application à la théorie des circuits oscillants est immédiate.

Je citerai notamment l'effet d'une liaison nouvelle sur les périodes d'un système vibratoire.

Examinons donc l'effet produit sur les périodes normales de vibration d'un système dynamique autour d'une configuration d'équilibre stable quand le nombre des degrés de liberté du système est diminué par l'introduction d'une liaison additionnelle.

Supposons que le système primitif est défini en fonction de ses *coordonnées normales* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et que l'énergie cinétique et l'énergie potentielle aient la forme

$$T = \frac{1}{2}(y_1'^2 + y_2'^2 + \ldots + y_n'^2), \tag{202}$$

$$V = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 y_1^2 + \lambda_2^2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 y_n^2), \tag{203}$$

et soit une nouvelle liaison exprimée par l'équation

$$f(y_1 y_2 \ldots y_n) = 0. \tag{204}$$

Comme $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont petits, nous pouvons développer la fonction f suivant les puissances ascendantes de ces variables et ne conserver dans ce développement que les termes de moindre degré, nous pouvons donc exprimer la nouvelle liaison par l'équation

$$A_1 y_1 + A_2 y_2 + \ldots + A_n y_n = 0, \tag{205}$$

où $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des constantes.

Digitized by Google

Comme la position d'équilibre est supposée compatible avec la nouvelle liaison, il n'y a pas de terme constant. Au moyen de cette équation, nous pouvons éliminer y_n. Nous avons ainsi

$$(206)\quad T = \frac{1}{2}\left[y_1'^2 + y_2'^2 + \ldots + y_{n-1}'^2 + \frac{1}{A_n^2}(A_1 y_1' + \ldots + A_{n-1} y_{n-1}')^2\right],$$

$$(207)\quad V = \frac{1}{2}\left[\lambda_1^2 y_1^2 + \lambda_2^2 y_2^2 + \ldots + \lambda_{n-1}^2 y_{n-1}^2 + \frac{\lambda_n^2}{A_n^2}(A_1 y_1 + \ldots + A_{n-1} y_{n-1})^2\right]$$

Les équations de Lagrange pour le mouvement du système astreint à toutes les liaisons anciennes et à la nouvelle liaison sont donc

$$(208)\quad y_r'' + \lambda_r^2 y_r + A_r\left[\frac{1}{A_n^2}(A_1 y_1'' + \ldots + A_{n-1} y_{n-1}'') + \frac{\lambda_n^2}{A_n^2}(A_1 y_1 + \ldots + A_{n-1} y_{n-1})\right] = 0$$

ou

$$(209)\quad y_r'' + \lambda_r^2 y_r + \mu A_r = 0,$$

r prenant les valeurs entières de 1 à $n-1$ et μ désignant l'expression

$$(210)\quad \mu = \frac{1}{A_n^2}(A_1 y_1'' + \ldots + A_{n-1} y_{n-1}'') + \frac{\lambda_n^2}{A_n^2}(A_1 y_1 + \ldots + A_{n-1} y_{n-1}) = -\frac{y_n''}{A_n} - \frac{\lambda_n^2 y_n}{A_n},$$

de sorte que les équations du mouvement du nouveau système peuvent s'écrire sous la forme des n équations ci-après :

$$(211)\quad y_r'' + \lambda_r^2 y_r + \mu A_r = 0,$$

r prenant toutes les valeurs de 1 à n et μ étant une nouvelle indéterminée.

Considérons maintenant un mode normal de vibration du système modifié, mode défini par les équations

$$(212)\quad y_1 = \alpha_1 \cos\lambda t,\quad y_2 = \alpha_2 \cos\lambda t,\quad \ldots,\quad y_n = \alpha_n \cos\lambda t,\quad \mu = \gamma \cos\lambda t.$$

En substituant dans les équations du mouvement, nous avons

$$(213)\quad \alpha_r(\lambda_r^2 - \lambda^2) + \gamma A_r = 0 \qquad (r = 1 \text{ à } n).$$

Substituons les valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ données par ces équations

Digitized by Google

dans l'équation

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n = 0, \tag{214}$$

nous avons

$$\frac{A_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda^2} + \ldots + \frac{A_n^2}{\lambda_n^2 - \lambda^2} = 0. \tag{215}$$

Cette équation en λ^2 a $n-1$ racines qui, d'après la forme même de l'équation, sont évidemment séparées par les quantités $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_n^2$. Les quantités $\frac{2\pi}{\lambda}$ correspondant à ces racines sont les périodes des modes normaux de vibration du système et il en résulte que les $n-1$ périodes de vibration normale du système soumis à la nouvelle liaison viennent se placer entre les n périodes du système primitif.

Remarques sur les coordonnées normales.

Considérons un courant qui se bifurque en plusieurs branches, on sait que, pour le calcul de l'intensité dans le tronc principal, on peut remplacer les résistances des branches en dérivation par la résistance composée de ces branches. On remplace ainsi le système de circuits primitif par un autre dans lequel la dissipation d'énergie sous forme de chaleur reste la même.

De même, dans le cas des circuits oscillants, prendre des coordonnées normales, revient à substituer au système un autre système ayant même énergie potentielle et même énergie cinétique, mais dans lequel les divers courants ne réagissent plus l'un sur l'autre pas plus que les surfaces conductrices n'exercent d'influence électrostatique les unes sur les autres. Le circuit se trouve ainsi décomposé en n branches indépendantes.

Exemples de liaisons.

Comment peut-on établir de nouvelles liaisons et que signifient celles-ci?

Si le corps (3) enveloppe (1) et (2), on aura entre les charges y_1, y_2, y_3 la relation

$$y_3 = y_1 + y_2.$$

Digitized by Google

Si les intensités y'_1, y'_2, y'_3 concourent en un point P sans capacité, on a

$$y'_1 + y'_2 + y'_3 = 0.$$

Si, quand on place les conducteurs (1), (2), (3) dans une position déterminée, le conducteur (1), par exemple, est assujetti à avoir un potentiel V_1 déterminé pour cette position, on a

$$V_1 = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3,$$

a_{11}, a_{12}, a_{13} étant certaines constantes dépendant de la configuration envisagée. Prendre la fonction linéaire $a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3$ pour variable, c'est supposer qu'on dispose du potentiel V_1 et qu'on le prend pour variable.

Champ de valabilité des équations.

Dans la Mécanique rationnelle, quand l'énergie potentielle est minimum, le système est dans une position d'équilibre stable et quand on étudie les petites oscillations du système autour de cette position d'équilibre, on sait que si les écarts et les vitesses sont suffisamment petits à l'instant initial, le système ne s'écartera pas beaucoup de la position d'équilibre. Le système peut alors être remplacé par le système dit *simplifié*. Et les équations de ce système sont des équations différentielles linéaires sans seconds membres à coefficients constants.

Ces équations sont donc de même forme que les équations du mouvement de l'électricité, quand on a en présence des conducteurs et des circuits et qu'on peut négliger les résistances.

Tandis que, dans le problème mécanique, les variables et les vitesses sont infiniment petites, ici les charges des conducteurs et les intensités des circuits peuvent prendre des valeurs finies.

Mais il faut remarquer que les équations ne seront plus valables, si les dimensions des fils où circulent les courants deviennent assez grandes pour qu'on ne puisse plus négliger les diamètres ou s'il y avait des substances magnétiques dont la perméabilité ne fût pas constante, etc.; dans ces divers cas, il faudrait recourir aux équations générales du champ électromagnétique dans un milieu à trois dimensions.

Digitized by Google

Enfin, s'il y a des résistances, il faut introduire la fonction de dissipation relative à l'énergie dégagée sous forme de chaleur.

Dans beaucoup de cas, on applique encore les mêmes équations, mais les selfs-inductances sont remplacées par des selfs-inductances apparentes, les perméabilités par des valeurs moyennes, etc.

Ainsi donc, en général, quand ces amplitudes sont grandes, les coefficients des formes quadratiques T et V cessent d'être des constantes; les circuits ne peuvent plus être considérés comme des circuits linéaires, il faut tenir compte de la répartition des courants à leur intérieur; les résistances cessent d'être négligeables, etc. Le problème change donc de nature.

Dans un problème de télégraphie sans fil, l'énergie cinétique T est l'énergie magnétique due au champ des courants qui circulent dans les solénoïdes.

L'énergie élastique V est l'énergie potentielle due aux charges électriques répandues sur les armatures des condensateurs.

La variable y sera la charge d'une armature, y' sera alors l'intensité du courant de charge. La variable y apparaîtra alors dans les équations.

Si un circuit est fermé, la variable y représentera la quantité d'électricité qui a traversé une section déterminée quelconque depuis l'époque prise pour origine. y' figurera dans T, mais y n'apparaîtra pas dans V. Ce sera une inconnue qu'on pourra ignorer.

Il arrive fréquemment, en Mécanique, que certaines inconnues restent ainsi ignorables et l'on peut alors réduire l'ordre du système d'équations différentielles.

Un exemple simple est celui du corps de révolution qui tourne autour de son axe; si I est son moment d'inertie, θ l'azimut dont il a tourné, $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ sa vitesse de rotation instantanée, l'équation du mouvement est

$$I\frac{d\omega}{dt} = L, \tag{216}$$

L étant le moment des forces extérieures et cette équation au lieu d'être du second ordre en θ est du premier ordre en ω, si L est une fonction de t et de ω, indépendante de θ.

Je me bornerai à indiquer quelques conséquences analytiques de ce point de vue.

Digitized by Google

Systèmes ayant des coordonnées cachées (d'après Whittaker).

Le mouvement d'un système dynamique soumis à des liaisons holonomes avec n degrés de liberté est déterminé par les équations de Lagrange :

$$\frac{dp_r}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n). \tag{217}$$

Dans cette équation, $q_1, q_2, \ldots, q_n$ désignent les variables indépendantes qui sont les coordonnées généralisées du système.

L'expression $\sum_r Q_r \delta q_r$ désigne le travail effectué par les forces extérieures dans un déplacement arbitraire $(\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n)$.

T désigne l'énergie cinétique.

p_r désigne la dérivée partielle de T prise par rapport à la vitesse généralisée $\frac{dq_r}{dt}$ de la variable q_r; c'est une quantité de mouvement généralisée.

T et $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ sont des fonctions connues de $\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \ldots, \frac{dq_n}{dt}$; $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et du temps t.

Dans les systèmes d'électricité, les liaisons sont, en général, indépendantes du temps et T est une forme quadratique des variables et de leurs vitesses.

Lorsque le système est conservatif, il existe une fonction potentielle V des variables q, telle que l'on ait

$$Q_r = -\frac{\partial V_r}{\partial q_r}, \tag{218}$$

de sorte que le travail élémentaire est égal à la diminution du potentiel

$$\Sigma Q_r \delta q_r = -\delta V. \tag{219}$$

Quand le système est conservatif, si l'on pose

$$L = T - V, \tag{220}$$

la fonction L est appelée fonction de Lagrange et les équations de Lagrange prennent la forme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q'_r}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \qquad \left(q'_r = \frac{dq_r}{dt}\right) (r = 1 \text{ à } n). \tag{221}$$

Digitized by Google

Dans la théorie électrodynamique de Weber, il y a un potentiel V qui, au lieu de ne dépendre que des variables q, est aussi fonction des vitesses. Par exemple, la force qui agit, à partir d'un centre attractif, fixe, sur l'unité de masse placée à la distance r, est

$$Q = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial r'} \tag{222}$$

avec

$$V = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{r'^2}{c^2}\right), \tag{223}$$

d'où

$$Q = +\frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{r'^2 - 2rr''}{c^2}\right). \tag{224}$$

Dans tous les cas où la force Q peut être mise sous la forme (6), les équations du mouvement peuvent encore être mises sous la forme (5); il y a une fonction de Lagrange.

Il peut arriver que certaines coordonnées q_1, q_2, par exemple, ne figurent pas explicitement dans la fonction de Lagrange L, bien qu'elles apparaissent par leurs vitesses.

Les coordonnées de ce genre sont des variables cachées; on les appelle *cycliques* ou *ignorables*.

Les équations du mouvement correspondant aux coordonnées cachées q_1, q_2 seront

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_1'}\right) = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_2'}\right) = 0, \tag{225}$$

d'où

$$\frac{\partial L}{\partial q_1'} = \beta_1, \qquad \frac{\partial L}{\partial q_2'} = \beta_2. \tag{226}$$

On peut profiter de ces deux intégrales, pour réduire l'ordre du système d'équations différentielles.

Je pose

$$R = L - q_1'\frac{\partial L}{\partial q_1'} - q_2'\frac{\partial L}{\partial q_2'}, \tag{227}$$

et j'exprime q_1', q_2', au moyen des formules (226), en fonction de q_3, q_4, ..., q_n et de β_1, β_2, de sorte que R ne dépende pas de ces quantités; soit

$$R = L - q_1'\beta_1 - q_2'\beta_2, \tag{228}$$

Digitized by Google

d'où

$$\delta R = \delta L - q'_1\,\delta\beta_1 - q'_2\,\delta\beta_2 - \beta_1\,\delta q'_1 - \beta_2\,\delta q'_2. \tag{229}$$

Or, on a

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q_3}\delta q_3 + \ldots + \frac{\partial L}{\partial q_n}\delta q_n + \frac{\partial L}{\partial q'_3}\delta q'_3 + \ldots + \frac{\partial L}{\partial q'_n}\delta q'_n + \beta_1\,\delta q'_1 + \beta_2\,\delta q'_2; \tag{230}$$

d'où, en additionnant (229) et (230) membre à membre,

$$\delta R = \frac{\partial L}{\partial q_3}\delta q_3 + \ldots + \frac{\partial L}{\partial q_n}\delta q_n + \frac{\partial L}{\partial q'_3}\delta q'_3 + \ldots + \frac{\partial L}{\partial q'_n}\delta q'_n - q'_1\,\delta\beta_1 - q'_2\,\delta\beta_2. \tag{231}$$

Mais les δ sont des variations de variables indépendantes ; donc on a

$$\frac{\partial R}{\partial q_3} = \frac{\partial L}{\partial q_3} \ldots \frac{\partial R}{\partial q_n} = \frac{\partial L}{\partial q_n}, \qquad \frac{\partial R}{\partial q'_3} = \frac{\partial L}{\partial q'_3} \ldots \frac{\partial R}{\partial q'_n} = \frac{\partial L}{\partial q'_n}; \tag{232}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \beta_1} = -q'_1, \qquad \frac{\partial R}{\partial \beta_2} = -q'_2 \tag{233}$$

et les équations de Lagrange pour $q_3, \ldots, q_n$ deviennent

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial q'_3}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_3} = 0, \qquad \ldots. \tag{234}$$

Il est à noter que L pouvait, dans un système conservatif, se décomposer en énergie cinétique et en énergie potentielle, tandis que R n'est pas la somme de deux fonctions de ce genre.

Dans ses conférences d'électricité théorique à l'École supérieure des télégraphes, M. Poincaré a fait usage de ce procédé pour l'étude du récepteur téléphonique (1905-1906) en tenant compte des courants particulaires.

Méthode pour la réduction à des coordonnées normales (1).

Soient T l'énergie cinétique, V l'énergie potentielle ; supposons

(1) JORDAN, 1872; E.-T. WHITTAKER, *Analytical Dynamics*, Cambridge; at the University Press, 1917, p. 179.

Digitized by Google

que T soit une forme quadratique définie, et posons

$$(235)\quad 2T = \sum_{i,j} a_{ij} q'_i q'_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n) \quad (a_{ij} = a_{ji}),$$

$$(236)\quad 2V = \sum_{i,j} b_{ij} q_i q_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n) \quad (b_{ij} = b_{ji}),$$

et soit $|a_{ij}| \neq 0$, en désignant ainsi le discriminant de la forme T.

Les équations du mouvement

$$(237)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_r}\right) = -\frac{\partial V}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

se transformeront en de nouvelles équations, si nous effectuons un changement linéaire de variables.

Posons, par exemple,

$$(238)\qquad Q = \sum_s h_s q_s.$$

Multiplions la première des équations (237) par m_1, la seconde par m_2, ..., la $r^{\text{ième}}$ par m_r et la $n^{\text{ième}}$ par m_n et ajoutons membre à membre, il vient

$$(239)\qquad \sum_{r,s} m_r a_{sr} q''_s = -\sum_{r,s} m_r b_{sr} q_s.$$

Je détermine les multiplicateurs m par les conditions

$$(240)\qquad \lambda \sum_r m_r a_{sr} = \sum_r m_r b_{sr} = \lambda h_s \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ce qui exige que λ soit racine du déterminant

$$(241)\qquad |\lambda a_{sr} - b_{sr}|.$$

L'équation (239) pourra alors s'écrire

$$(242)\qquad \sum_s h_s q''_s = -\lambda_1 \sum_s h_s q_s$$

ou

$$(243)\qquad Q'' + \lambda_1 Q = 0,$$

λ_1 étant une racine. Sylvester a d'ailleurs démontré la réalité de toutes

Digitized by Google

les racines du déterminant (241), sous la condition que T soit une forme définie positive.

Cela admis, effectuons un changement linéaire de variables, dans lequel Q soit l'une des nouvelles variables. Il n'y aura pas d'ambiguïté, si l'on désigne les nouvelles variables par $q_1, q_2, \ldots, q_n$; mais nous admettrons que Q et q_1 soient identiques l'un à l'autre, de sorte que les équations ci-dessus seront satisfaites pour $h_1 = 1$, $h_2 = 0, \ldots, h_n = 0$.

Comme la forme quadratique T est une forme définie positive, les coefficients $a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ des carrés de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$ ne peuvent pas être nuls; on peut donc prendre pour nouvelles variables

$$q_2 + \frac{a_{12}}{a_{22}} q_1, \quad q_3 + \frac{a_{13}}{a_{33}} q_1, \quad \ldots, \quad q_n + \frac{a_{1n}}{a_{nn}} q_1.$$

Ce changement de variables a pour effet de faire disparaître de T les termes rectangles $q'_1 q'_2, q'_1 q'_3, \ldots, q'_1 q'_n$. On peut donc admettre que les coefficients $a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1}$ sont nuls.

Si, maintenant, on introduit les conditions $h_1 = 0$, $h_2 = 0, \ldots, h_n = 0, a_{21} = 0, \ldots, a_{n1} = 0$ dans les équations qui déterminent $m_1, m_2, \ldots, m_n, h_1, h_2, \ldots, h_n$ et λ, nous obtenons :

$$m_1 = \frac{1}{a_{11}}, \qquad m_2 = 0, \qquad m_3 = 0, \qquad \ldots, \qquad m_n = 0,$$
$$b_{11} = \lambda_1 a_{11}, \qquad b_{21} = 0, \qquad b_{31} = 0, \qquad \ldots, \qquad b_{n1} = 0.$$

Il s'ensuit que l'équation

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right) = -\frac{\partial V}{\partial q_1}$$

a la forme

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \lambda_1 q_1 = 0,$$

tandis que les équations

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_r}\right) = -\frac{\partial V}{\partial q_r} \qquad (r = 2, 3, \ldots, n)$$

ont la forme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T'}{\partial q'_r}\right) = -\frac{\partial V'}{\partial q_r} \qquad (r = 2, 3, \ldots, n),$$

où

$$T' = T - \frac{1}{2} a_{11} q'^2_1, \qquad V' = V - \frac{1}{2} \lambda_1 a_{11} q^2_1,$$

de sorte que T' et V' n'impliquent plus q'_1 ni q_1.

Digitized by Google

Ce dernier système d'équations peut être regardé comme le système d'équations correspondant à un système vibratoire à $n-1$ degrés de liberté. On peut traiter celui-ci de la même manière, isoler une coordonnée q_2, etc. et arriver finalement à avoir les variables choisies de telle sorte que les énergies cinétique et potentielle du système original puissent être exprimées en fonction des nouvelles variables sous la forme

$$2T = \alpha_{11} q_1'^2 + \alpha_{22} q_2'^2 + \ldots + \alpha_{nn} q_n'^2,$$
$$2V = \beta_{11} q_1^2 + \beta_{22} q_2^2 + \ldots + \beta_{nn} q_n^2,$$

où les α et les β sont des constantes.

Si, finalement, nous prenons pour variables $q_1\sqrt{\alpha_{11}}$, $q_2\sqrt{\alpha_{22}}$, ... $q_n\sqrt{\alpha_{nn}}$ au lieu de $q_1, q_2, \ldots, q_n$, les énergies cinétique et potentielle se mettent sous la forme

$$2T = \Sigma q_s'^2 \qquad 2V = \Sigma \mu_s q_s^2 \qquad \text{avec } \mu_s = \frac{\beta_{ss}}{\alpha_{ss}}.$$

Il est indifférent pour cette réduction que les racines de l'équation déterminante soient distinctes ou non.

Les coordonnées auxquelles nous sommes arrivés sont les coordonnées principales ou normales.

Grâce à l'emploi de ces coordonnées, des problèmes physiquement distincts sont ramenés à être les images les uns des autres, moyennant une correspondance convenable des données et des variables.

Oscillations dans les systèmes non conservatifs.

Je passe au cas d'un système non conservatif.

Si un système dynamique est déterminé par son énergie cinétique, son énergie potentielle et la fonction qui représente la dissipation d'énergie, on peut appliquer une méthode analogue à la précédente pour déterminer la nature des petites vibrations du système autour de la configuration d'équilibre.

Pour la simplicité, considérons un système à deux degrés de liberté. Nous trouverons que, pour le problème des vibrations, l'énergie cinétique et la fonction de dissipation peuvent être prises comme deux fonctions quadratiques homogènes des vitesses, et que l'énergie potentielle peut l'être comme une fonction quadratique homogène

Digitized by Google

des coordonnées, les coefficients de ces fonctions étant des constantes. Prenons pour coordonnées les variables qui seraient les *coordonnées normales* s'il n'y avait pas de fonction de dissipation, nous pouvons écrire ces trois fonctions sous la forme

$$T = \frac{1}{2}(y_1'^2 + y_2'^2), \tag{244}$$

$$F = \frac{1}{2}(a y_1'^2 + 2h y_1' y_2' + b y_2'^2), \tag{245}$$

$$V = \frac{1}{2}(\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2), \tag{246}$$

où λ_1 et λ_2 seront supposés positifs, de façon que l'équilibre soit stable quand il n'y a pas de forces dissipatives.

Les équations du mouvement sont

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y_r'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_r} + \frac{\partial F}{\partial y_r'} + \frac{\partial V}{\partial y_r} = 0 \qquad (r = 1, 2) \tag{247}$$

ou

$$y_1'' + a y_1' + h y_2' + \lambda_1 y_1 = 0, \tag{248}$$

$$y_2'' + h y_1' + b y_2' + \lambda_2 y_2 = 0. \tag{249}$$

Essayons une solution particulière de la forme

$$y_1 = A e^{pt}, \qquad y_2 = B e^{pt}. \tag{250}$$

Substituons ces valeurs dans les équations différentielles, nous avons

$$A(p^2 + ap + \lambda_1) + B hp = 0, \tag{251}$$

$$A hp + B(p^2 + bp + \lambda_2) = 0, \tag{252}$$

d'où il suit que p doit être racine de l'équation

$$(p^2 + ap + \lambda_1)(p^2 + bp + \lambda_2) - h^2 p^2 = 0. \tag{253}$$

Si nous supposons que les forces dissipatives soient comparativement petites, de sorte que les carrés des quantités a, b, h puissent être négligés, les racines de cette équation sont

$$p_1 = i\sqrt{\lambda_1} - \frac{1}{2}a, \qquad p_2 = i\sqrt{\lambda_2} - \frac{1}{2}b. \tag{254}$$

Correspondant à la racine p_1 nous avons, par la seconde des

Digitized by Google

équations (251) (252) entre A et B, la relation

$$\frac{B}{A} = \frac{ih\sqrt{\lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda_2}. \tag{255}$$

Une solution particulière des équations différentielles est donc donnée par

$$y_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)\, e^{-\frac{1}{2}at}(\cos\sqrt{\lambda_1}\,t + i\sin\sqrt{\lambda_1}\,t), \tag{256}$$

$$y_2 = h\sqrt{\lambda_1}\, e^{-\frac{1}{2}at}(i\cos\sqrt{\lambda_1}\,t - \sin\sqrt{\lambda_1}\,t) \tag{257}$$

et une seconde solution particulière s'obtient en changeant i en $-i$ dans ces expressions. Il s'ensuit que deux solutions particulières réelles des équations différentielles sont les suivantes :

$$y_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)\, e^{-\frac{1}{2}at}\cos\sqrt{\lambda_1}\,t, \qquad y_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)\, e^{-\frac{1}{2}at}\sin\sqrt{\lambda_1}\,t, \tag{258}$$

$$y_2 = -h\sqrt{\lambda_1}\, e^{-\frac{1}{2}at}\sin\sqrt{\lambda_1}\,t, \qquad y_2 = h\sqrt{\lambda_1}\, e^{-\frac{1}{2}at}\cos\sqrt{\lambda_1}\,t. \tag{259}$$

Donc la solution réelle la plus générale en $e^{p_1 t}$ est

$$y_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)\, A\, e^{-\frac{1}{2}at}\sin(\sqrt{\lambda_1}\,t + \varepsilon) \tag{260}$$

et

$$y_2 = h\sqrt{\lambda_1}\, A\, e^{-\frac{1}{2}at}\sin\left(\sqrt{\lambda_1}\,t + \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right), \tag{261}$$

où A et ε sont deux constantes arbitraires réelles.

Ces formules représentent un des *modes normaux* de vibration du système. Ajoutant la solution correspondante en $e^{p_2 t}$, nous avons finalement la solution générale du problème vibratoire, à savoir :

$$y_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)\, A\, e^{-\frac{a}{2}t}\sin(\sqrt{\lambda_1}\,t + \varepsilon) + h\sqrt{\lambda_2}\, B\, e^{-\frac{1}{2}bt}\sin\left(\sqrt{\lambda_2}\,t + \frac{\pi}{2} + \gamma\right), \tag{262}$$

$$y_2 = h\sqrt{\lambda_1}\, A\, e^{-\frac{a}{2}t}\sin\left(\sqrt{\lambda_1}\,t + \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) + (\lambda_2 - \lambda_1)\, B\, e^{-\frac{1}{2}bt}\sin(\sqrt{\lambda_2}\,t + \gamma), \tag{263}$$

où A, B, ε, γ sont quatre constantes à déterminer d'après les conditions initiales du mouvement.

Si nous supposons actuellement que les forces dissipatives sont telles que de l'énergie soit constamment perdue par le système, de

Digitized by Google

sorte que F soit une forme positive définie, et que a et b sont positifs, la dernière équation montre alors que les vibrations vont en mourant, en raison de la présence des facteurs $e^{-\frac{1}{2}at}$ et $e^{-\frac{1}{2}bt}$; les périodes des vibrations normales sont, en négligeant les carrés de a, b, h, les mêmes que si les forces dissipatives n'existaient pas, et, dans une *vibration normale*, la grandeur de l'oscillation d'une des coordonnées est petite comparée à l'amplitude de l'oscillation de l'autre coordonnée, tandis que les phases de la vibration dans les deux coordonnées à un instant quelconque diffèrent d'un quart de période.

Examinons le cas général :

Si les trois fonctions mécaniques T, F et V d'un système ne sont pas simultanément réductibles à une somme de carrés indépendants, les vibrations naturelles sont d'un caractère plus compliqué, que lorsque F est nul.

Cependant si la dissipation d'énergie est faible, la méthode de réduction est toujours utile et la catégorie de cas que l'on envisage ainsi ne laisse pas que d'avoir une certaine importance.

Supposons donc que T et V sont exprimés en une somme de carrés

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}(y_1'^2 + y_2'^2 + \ldots), \tag{264}$$

$$\mathrm{V} = \frac{1}{2}(\lambda_1 y^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots), \tag{265}$$

tandis que la fonction de dissipation d'énergie apparaît toujours sous la forme plus générale

$$\mathrm{F} = \frac{1}{2} b_{11} y_1'^2 + \ldots + b_{12} y_1' y_2' + \ldots. \tag{266}$$

Les équations du mouvement sont, en conséquence,

$$\left\{\begin{array}{l} y_1'' + b_{11} y_1' + b_{12} y_2' + b_{13} y_3' + \ldots + \lambda_1 y_1 = 0, \\ y_2'' + b_{21} y_1' + b_{22} y_2' + b_{23} y_3' + \ldots + \lambda_2 y_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}\right. \tag{267}$$

dans ces équations, les b doivent être traités comme des quantités petites. S'il n'y avait pas de viscosité, les équations ci-dessus seraient satisfaites en supposant que l'une des coordonnées y_r varie d'une façon convenable, tandis que les autres s'évanouissent.

Dans le cas actuel, il y a une solution correspondante dans laquelle

Digitized by Google

les valeurs d'une autre coordonnée quelconque y_s sera petite par rapport à y_r.

Ainsi donc, si nous négligeons les termes du second ordre, la $r^{\text{ième}}$ équation devient

$$y''_r + b_{rr} y'_r + \lambda_r y_r = 0, \tag{268}$$

d'où nous induisons que y_r varie approximativement comme s'il n'y avait pas de changement dû à la viscosité dans le mode de vibration.

Si y_r varie comme $e^{p_r t}$, nous obtenons, pour déterminer p_r,

$$p_r^2 + b_{rr} p_r + \lambda_r = 0. \tag{269}$$

Les racines de cette équation sont complexes, mais leur partie réelle est petite en comparaison de la partie imaginaire.

Par la $s^{\text{ième}}$ équation, si nous introduisons la supposition que toutes les coordonnées varient comme $e^{p_r t}$, nous avons

$$(p_r^2 + \lambda_s) y_s + b_{rs} p_r y_r = 0 \tag{270}$$

en négligeant les termes du second ordre, d'où

$$\frac{y_s}{y_r} = -\frac{b_{rs} p_r}{p_r^2 + \lambda_s} = \frac{b_{rs} p_r}{p_s^2 - p_r^2}. \tag{271}$$

Cette équation détermine approximativement le mode de vibration modifié. Comme la partie principale de p_r est imaginaire, nous voyons que les coordonnées y_s sont approximativement toutes en phase, mais que leur phase commune diffère d'un quart de période de la phase de y_r.

Ainsi donc, quand la fonction F ne se réduit pas à une somme de carrés, le caractère des modes élémentaires de vibration est moins simple qu'autrement et les différentes parties du système ne sont plus simultanément en phase.

Nous venons de prouver que si le frottement est peu important, la valeur de p_r peut être calculée approximativement pour les vibrations fondamentales sans avoir égard au changement éprouvé; mais, par le moyen de l'équation (267), nous pouvons obtenir une approximation beaucoup plus serrée, en tenant compte des carrés des quantités petites.

La $r^{\text{ième}}$ équation donne

$$p_r^2 + \lambda_r + b_{rr} p_r + \sum \frac{p_r^2 b_{rs}^2}{p_s^2 - p_r^2} = 0. \tag{272}$$

Digitized by Google

La partie principale des termes compris sous le signe de sommation étant réelle, la correction n'influe pas sur la partie réelle de p_r dont dépend l'ordre de grandeur de l'amortissement.

Ainsi donc une analyse semblable à celle que nous avons appliquée pour les systèmes à deux degrés de liberté fournit des résultats correspondants pour les systèmes qui ont plus de deux degrés de liberté. Si les forces de dissipation sont petites et que la fonction de dissipation de l'énergie ainsi que l'énergie potentielle soient des formes définies positives, nous trouvons que les périodes des vibrations normales sont (en négligeant les carrés des coefficients de la fonction de dissipation) inaltérées par la présence des forces dissipatrices, mais que les vibrations vont en mourant peu à peu et, si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont les coordonnées normales du système quand les forces dissipatrices sont absentes, il y a une vibration normale du système, quand les forces dissipatrices sont présentes, pour laquelle l'amplitude des vibrations en $y_2, y_3, \ldots, y_n$ est petite en comparaison de l'amplitude de la vibration y_1 et la phase des vibrations en $y_2, y_3, \ldots, y_n$ diffère d'un quart de période de la phase de vibration en y_1. On voit l'avantage qu'il y a à ramener le système à être défini par des coordonnées normales, puisque alors les résultats sont simples à discuter.

Nous avons déjà indiqué à maintes reprises ce que c'est que l'énergie potentielle et l'énergie cinétique, quand il s'agit d'un problème d'électricité. Quant à la fonction de dissipation de l'énergie, c'est la puissance calorifique; c'est la quantité de chaleur comptée en unités mécaniques, qui est dissipée dans les conducteurs, par unité de temps, c'est le travail produit par unité de temps par les forces de viscosité qui sont données par la loi de Joule et qui proviennent de la résistance opposée au mouvement des électrons par les molécules de la matière des conducteurs, résistance qui, par les chocs qu'elle occasionne, se manifeste sous forme d'augmentation de la force vive moyenne moléculaire, c'est-à-dire sous forme de chaleur sensible.

Le problème qui consiste à prendre des *coordonnées normales* est le même que celui qui consiste à ramener simultanément à une somme de carrés deux formes quadratiques.

Supposons que nous ayons pris pour variables les variables normales y_i, telles que l'énergie potentielle V soit

$$V = \frac{1}{2} \Sigma \lambda_i^2 y_i^2$$

Digitized by Google

et qu'on ait, simultanément, pour l'énergie cinétique,

$$T = \frac{1}{2} \Sigma y_i'^2.$$

Les coefficients λ_1^2, λ_2^2, ..., λ_n^2, ainsi déterminés, jouissent d'une propriété remarquable. Voici cette propriété :

Nous savons déjà que les quantités $\frac{2\pi}{\lambda_i}$ sont les périodes des vibrations fondamentales.

Or, quand on ajoute au système des liaisons en nombre suffisant pour réduire à l'unité le nombre des degrés de liberté du système, on obtient un système qui n'a plus qu'une seule période de vibration. Mais on peut s'arranger de façon que cette période unique $\frac{2\pi}{\lambda}$ soit égale à l'une des périodes de vibration normale du système primitif, $\frac{2\pi}{\lambda_i}$ par exemple; en ce cas, la période $\frac{2\pi}{\lambda}$ du système réduit à un degré de liberté a une valeur stationnaire; c'est-à-dire que si l'on modifie très peu les liaisons qu'on a ajoutées, la période $\frac{2\pi}{\lambda}$ s'écartera très peu de $\frac{2\pi}{\lambda_i}$; elle passe, en effet, pour cette valeur par un maximum ou un minimum ou du moins sa variation γ est d'un ordre supérieur au premier. Telle est la propriété annoncée. On la démontrera aisément, en cherchant l'expression de λ; il suffit de remarquer que le nombre des degrés de liberté étant réduit à l'unité, si l'on désigne par μ_1, μ_2, ..., μ_n des constantes et par γ la variable unique qui définit, au temps t, la position du système, on a

$$(273) \qquad y_1 = \mu_1 \gamma, \quad y_2 = \mu_2 \gamma, \quad \ldots, \quad y_n = \mu_n \gamma;$$

d'où

$$(274) \qquad T = \frac{1}{2} (\Sigma \mu_i^2) \gamma'^2,$$

$$V = \frac{1}{2} (\Sigma \lambda_i^2 \mu_i^2) \gamma^2.$$

On en déduit, pour λ,

$$(275) \qquad \lambda^2 = \frac{\Sigma \lambda_i^2 \mu_i^2}{\Sigma \mu_i^2}.$$

L'algèbre apprend que λ^2 est une fonction des variables μ_i, dont

Digitized by Google

les valeurs stationnaires sont égales à

$$\lambda_1^2, \quad \lambda_2^2, \quad \ldots, \quad \lambda_n^2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Dans l'exposé qui précède, nous avons appelé *coordonnées normales* des fonctions linéaires des variables indépendantes, dont dépend la configuration du système simplifié, telles que les expressions des énergies cinétique et potentielle soient de la forme

$$(276) \qquad T = \frac{1}{2}(y_1'^2 + y_2'^2 + \ldots + y_n'^2),$$

$$(277) \qquad V = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 y_1^2 + \lambda_2^2 y_2^2 + \ldots - \lambda_n^2 y_n^2),$$

et ce qui caractérise au point de vue physique ces coordonnées normales, c'est précisément cette propriété que nous venons de rappeler, à savoir que les vibrations normales ont un caractère stationnaire.

Au point de vue analytique, la réduction à des *coordonnées normales* équivaut au fond au problème de la réduction simultanée de deux formes quadratiques à une somme de carrés indépendants.

Au point de vue mécanique, le résultat le plus remarquable de la discussion des petits mouvements, c'est le principe de Daniel Bernoulli de la superposition des vibrations.

Ce qu'il convient encore de faire ressortir, c'est que lorsque les oscillations se font autour d'une position d'équilibre stable et qu'il n'y a pas de dissipation d'énergie, alors que la solution générale des équations linéaires est d'une façon générale de la forme

$$y = P(t)\, e^{\mu t}(A \cos \nu t + B \sin \nu t);$$

les P désignant des polynomes en t, les A et B des constantes arbitraires et les μ et ν des constantes numériques, on démontre que dans le cas présent, le temps ne peut figurer que sous le signe sin ou cos. Autrement, S_0 ne serait pas configuration d'équilibre stable.

Dans le cas où quelques-uns des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de V ne seraient pas positifs, il y aurait instabilité pour certains mouvements.

Enfin, s'il y a dissipation de l'énergie, le repos est une position d'équilibre stable vers laquelle le système tend à retourner sans cesse en s'en approchant suivant une loi asymptotique.

Digitized by Google

La génération des oscillations électriques ne peut donc s'effectuer que dans des systèmes qui ne sont pas assimilables à ceux que nous venons de considérer, où T et V étaient décomposables en sommes de carrés tous positifs.

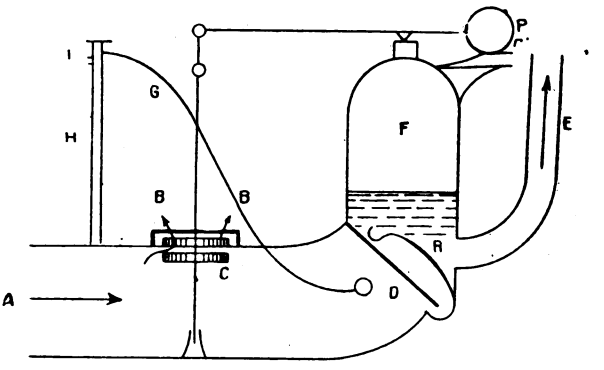
Génération des oscillations. Bélier hydraulique.

Le prototype des mouvements oscillatoires permanents est celui d'un pendule entretenu par l'action d'un poids réglé par un échappement, l'oscillation du pendule va en augmentant jusqu'à ce que les résistances passives absorbent l'énergie communiquée par l'impulsion de chaque dent qui passe.

On peut, de même, alimenter un circuit oscillant pourvu d'un éclateur par une force électromotrice constante. C'est un système qui a la plus grande analogie avec le bélier hydraulique, qui a été inventé en 1797 par Montgolfier. Je rappelle en quoi consiste ce dispositif.

Le bélier hydraulique est une machine à la fois motrice et éléva-

Fig. 6.



toire qui, lors de son apparition, parut remarquable par la nouveauté de son principe et par son bon rendement. Malheureusement, si l'on augmente les dimensions, les assemblages des conduites sont facilement détruits. Cet appareil a été perfectionné par Bollée vers 1864.

L'eau arrivant en A s'écoule par l'ouverture B avec une vitesse croissante; le clapet plongeur C équilibré par le contrepoids P est entraîné par le courant et vient obstruer l'orifice d'évacuation B; ce

Digitized by Google

clapet C forme ainsi soupape d'arrêt; le courant d'eau qui ferme C soulève également la soupape de refoulement D et monte dans le tuyau E. Ce courant remonterait à une hauteur qui serait inférieure au niveau du réservoir servant à l'alimentation de la conduite d'arrivée A, si l'écoulement se faisait en régime constant. Mais la masse qui était en mouvement pendant l'ouverture B ne trouve plus cette issue quand B se ferme; la masse qui se serait échappée latéralement communique sa force vive à l'eau en ascension; celle-ci se trouve donc remontée à une hauteur supérieure, hauteur qui dépend de la section des conduites et des frottements. Bientôt la vitesse du courant diminue et le clapet C retombe dès que la soupape d'ascension D s'est elle-même refermée. Cette soupape D sert alors de clapet de retenue; la rapidité de sa fermeture est favorisée par un ressort R réglable. La continuité du mouvement ascensionnel est réglée par le réservoir d'air F en forme de cloche. Comme l'air de cette cloche est peu à peu entraîné par l'eau, on l'alimente en air au moyen du tuyau d'injection G. Le mouvement alternatif du liquide dans la colonne verticale H est utilisé pour aspirer l'air par une soupape I et pour le refouler par G. Cet air venant au-dessous de la soupape D en adoucit le fonctionnement; enfin, la brusquerie de la fermeture du clapet plongeur C est atténuée par la forme donnée à l'orifice d'évacuation et par un ressort compensateur r.

Le mouvement de fermeture du clapet plongeur commence quand l'accélération du courant a atteint une valeur donnée et le temps qui s'écoule entre la fermeture et la retombée de ce clapet dépend de la quantité de force vive qui devra être consommée dans la colonne de refoulement soit sous forme de travail utile d'élévation d'eau, soit dans les résistances passives, en partant de l'état initial, qui est caractérisé par la vitesse du courant au moment du coup de bélier.

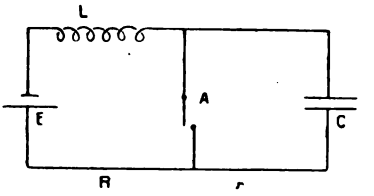
De même, dans un éclateur, l'étincelle passe lorsque la différence de potentiel aux bornes, laquelle dépend principalement des forces électromotrices d'induction en jeu, atteint une valeur donnée et elle cesse de passer lorsque l'énergie présente dans le circuit a été amortie par l'effet utile du rayonnement ou par les résistances passives dans les conducteurs.

L'analogie électrique du bélier hydraulique se retrouve dans le dispositif électrique représenté ci-après. Quand la clé A est abaissée, la pile E envoie un courant électrique à travers la self-inductance L, de

Digitized by Google

sorte que le courant y' dû à cette force électromotrice tend à prendre une certaine valeur limitée par les dimensions de la résistance R. En

Fig. 7.



même temps la force vive de l'éther devient égale à $\frac{1}{2} L y'^2$. Mais, si l'on ouvre la clé A, il se développe dans la bobine une force électromotrice de self-induction $-L\frac{dy'}{dt}$ qui prolonge le courant et qui, s'ajoutant à la force électromotrice E, tend à porter la différence de potentiel entre les deux armatures du condensateur C formant réservoir à un niveau qui sera le plus souvent de beaucoup supérieur à celui de la force électromotrice de la pile E.

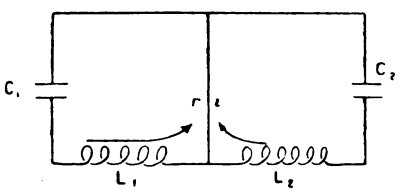
L'analogie sera encore plus frappante, si la clé A sert d'armature à la bobine L de façon à couper le circuit par l'effet de l'augmentation de l'intensité du courant y'.

C'est le principe de la sonnerie électrique et c'est l'explication de l'étincelle que l'on aperçoit pendant le fonctionnement entre la vis de réglage et le ressort interrupteur. La force électromotrice de la pile ne pourrait suffire à vaincre la résistance diélectrique de l'air.

Passons au cas où il y a deux variables indépendantes :

Le plus simple des systèmes à deux variables indépendantes est

Fig. 8.



constitué par deux circuits oscillants qui sont accouplés par une résistance ohmique commune aux deux circuits.

Si C_1 et C_2, L_1 et L_2 sont les capacités et les coefficients de self-

Digitized by Google

induction des deux circuits, on aura pour l'énergie cinétique T, en appelant y'_1 et y'_2 les courants de charge,

$$2T = L_1 y'^2_1 + L_2 y'^2_2 \tag{278}$$

et, pour l'énergie élastique due au déplacement électrique,

$$2V = \frac{1}{C_1} y_1^2 + \frac{1}{C_2} y_2^2, \tag{279}$$

si y_1 et y_2 sont les charges des deux condensateurs C_1 et C_2.

Si j'appelle R_1 et R_2 les résistances ohmiques des circuits et r la résistance de la branche commune, dans laquelle passe la somme des courants y'_1 et y'_2, la fonction de dissipation sera

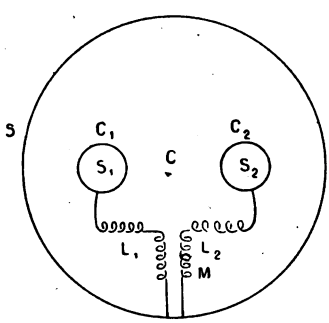
$$F = R_1 y'^2_1 + R_2 y'^2_2 + r(y'_1 + y'_2)^2. \tag{280}$$

Utilité des coordonnées normales.

L'emploi des coordonnées normales montre que ce système est l'image d'un autre système quelconque où il y aurait deux degrés de liberté.

On peut envisager, par exemple, deux conducteurs S_1 et S_2 placés

Fig. 9.



dans un milieu diélectrique à l'intérieur d'une enveloppe S, et reliés à cette enveloppe respectivement par deux circuits linéaires agissant par induction magnétique l'un sur l'autre.

Les lignes de force électriques émanées de S_1 aboutissent soit à

Digitized by Google

l'enveloppe S, soit à l'autre conducteur S_2 ; de même, les lignes de force de S_2 aboutissent soit à S_1, soit à l'enveloppe et l'énergie élastique V est de la forme suivante, où y_1 et y_2 sont les charges des conducteurs S_1 et S_2 ; savoir :

$$V = \frac{1}{2}\frac{y_1^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{y_2^2}{C_2} + \frac{1}{C}y_1 y_2. \tag{281}$$

L'énergie magnétique est de la forme

$$T = \frac{1}{2}L_1 y_1'^2 + \frac{1}{2}L_2 y_2'^2 + M y_1' y_2'. \tag{282}$$

M étant le coefficient d'induction mutuelle.

Je n'écris pas la fonction de dissipation qui serait également une forme quadratique des intensités.

Ce qui est extrêmement remarquable, c'est qu'au point de vue de la loi suivant laquelle les charges varient avec le temps, on peut remplacer, par un changement linéaire de variables, les variables actuelles par des variables normales et mettre ainsi les équations du problème sous une forme qui est celle où elles se mettent tout naturellement dans le système que nous venons d'examiner antérieurement et dans lequel la réaction des deux circuits, l'un sur l'autre, était obtenue par une voie tout à fait différente.

Au point de vue théorique, l'étude de l'un des systèmes est donc immédiatement ramenée à l'étude de l'autre.

Digitized by Google

CHAPITRE V.

OSCILLATIONS DE L'ANTENNE.

Analogie de l'antenne et de la corde vibrante.

L'intensité du champ électrique, l'intensité du champ magnétique ne tombent pas sous nos sens, elles ne se voient ni ne se touchent, c'est pourquoi il est utile pour notre imagination de trouver une représentation mécanique de ces phénomènes; c'est ainsi qu'une des analogies les plus fréquemment employées est celle d'une antenne avec une corde vibrante.

Pour approfondir cette analogie, il suffit de rechercher dans les deux cas les expressions de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique.

Occupons-nous de la corde. Elle est attachée à un point fixe A, son autre extrémité passe sur une très petite poulie B et est tendue par un poids P, qui lui donne une certaine tension. Faisons vibrer la corde. Au cours de ses variations de forme, elle s'écarte très peu de la droite AB, autour de laquelle elle oscille. Supposons pour simplifier que ses oscillations s'exécutent dans un plan vertical. La cause de ces oscillations est la tension du poids qui ramène la corde vers la position de repos d'où elle a été écartée. La corde s'allonge un peu, sous l'effet des réactions élastiques provoquées par l'amplitude de son mouvement, mais cet allongement n'est que du second ordre si l'amplitude est du premier et l'effet de l'élasticité de la substance de la corde peut être négligé. On peut négliger également l'action de la pesanteur sur les différents éléments de la corde, si le poids P est pris suffisamment grand. Alors, la corde peut être assimilée à un fil inextensible et non pesant, dont la longueur est l et dont la masse ml est petite vis-à-vis de P.

Prenons AB horizontal; soit y l'écart de l'élément ds, de masse mds, à partir de sa position de repos; cet écart est supposé vertical.

Digitized by Google

L'énergie potentielle V de la corde pendant son mouvement est égale à Ph, si h désigne l'excès sur la distance AB de la longueur de la corde comprise entre le point d'attache A et la poulie B; car le poids a dû être remonté justement de cette même quantité.

Il s'agit d'évaluer Ph; soit donc ds un élément de la longueur de la corde, il se projette sur AB suivant l'élément de la longueur dx, et l'on a

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\alpha, \tag{283}$$

α étant l'angle infiniment petit de ds avec AB. On peut, à ce degré d'approximation, écrire

$$ds - dx = ds(1 - \cos\alpha) = ds\frac{\alpha^2}{2} = \frac{1}{2}ds\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2, \tag{284}$$

les ∂ en ronde rappelant que, si l'on envisage la configuration de la corde, y est fonction de x, mais que, si l'on envisage le mouvement des éléments, y est fonction de t.

On aura donc, pour expression de l'énergie potentielle,

$$V = Ph \tag{285}$$

avec

$$h = \int_0^l (ds - dx), \tag{286}$$

d'où

$$V = \frac{P}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx. \tag{287}$$

Soit T l'énergie cinétique. Comme m est la masse de l'unité de longueur de la corde, on a évidemment

$$T = \frac{m}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx. \tag{288}$$

Mais, d'après un principe de Mécanique bien connu, l'intégrale

$$\int_0^{t_1} (T - V)\, dt \tag{289}$$

est stationnaire. On aura donc

$$\int_0^{t_1} (\delta T - \delta V)\, dt = 0 \tag{290}$$

Digitized by Google

ou

$$(291)\qquad \int_0^{t_1}\left(m\int_0^{l}\frac{\partial y}{\partial t}\,\delta\,\frac{\partial y}{\partial t}\,dx-\mathrm{P}\int_0^{l}\frac{\partial y}{\partial x}\,\delta\,\frac{\partial y}{\partial x}\,dx\right)dt=0;$$

or, on a, pour la première partie de cette différence,

$$(292)\qquad \int_0^{l} m\,dx\int_0^{t_1}\frac{\partial y}{\partial t}\,\frac{\partial\,\delta y}{\partial t}\,dt=\int_0^{l} m\,dx\left(\left|\frac{\partial y}{\partial t}\,\delta y\right|_0^{l}-\int_0^{t_1}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,\delta y\,dt\right)$$

en intervertissant les signes de dérivation $\frac{\partial}{\partial t}$ et de variation δ ainsi que l'ordre des intégrations.

Pour la seconde partie, en intervertissant les signes de dérivation $\frac{\partial}{\partial x}$ et δ, on a, de même,

$$(293)\qquad \int_0^{t_1}\mathrm{P}\int_0^{l}\frac{\partial y}{\partial x}\,\frac{\partial\,\delta y}{\partial x}\,dx\,dt=\int_0^{t_1}\left(\mathrm{P}\left|\frac{\partial y}{\partial x}\,\delta y\right|_0^{l}-\int_0^{l}\mathrm{P}\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,dx\right)dt.$$

Pour $t=0$ et $t=t_1$, pour $y=0$ et pour $y=l$, la variation δy doit être supposée nulle pour l'application du principe que je viens de rappeler. Les intégrales simples disparaissent et il reste simplement, en annulant l'élément de l'intégrale double,

$$(294)\qquad m\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\mathrm{P}\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

ce qui est l'équation bien connue des cordes vibrantes.

On aura, évidemment, les mêmes calculs à effectuer, si l'on envisage une antenne dont la capacité γ et le coefficient de self-induction λ, par unité de longueur, puissent être considérés comme constants. Cette conséquence résulte des expressions de l'énergie électrique V et de l'énergie magnétique T. On a, en effet, pour la quantité d'électricité, qui charge l'élément ds au temps t, la différence entre la quantité qui est entrée par un bout y et celle qui est sortie par l'autre $y+\frac{\partial y}{\partial x}dx$, c'est-à-dire $-\frac{\partial y}{\partial x}dx$. Comme la capacité de l'élément est $\gamma\,dx$, l'énergie potentielle est pour l'élément

$$(295)\qquad \frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx^2}{\gamma\,dx},$$

d'où

$$(296)\qquad \mathrm{V}=\frac{1}{2}\int_0^{l}\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$$

Digitized by Google

et l'énergie cinétique est

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \lambda \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dx; \tag{297}$$

on voit que l'inductance par unité de longueur est l'analogue de la masse par une unité de longueur et que le poids tenseur est l'équivalent de ce que Maxwell appelle *le coefficient de potentiel rapporté à l'unité de longueur*.

Oscillations dans un coup de bélier hydraulique.

Le mouvement électrique dont l'antenne est le siège a aussi la plus grande analogie avec le mouvement de l'eau dans une conduite au moment d'un coup de bélier. C'est cette théorie que je voudrais esquisser. Elle implique une étude préalable de l'équilibre élastique d'un tuyau cylindrique soumis à des pressions uniformes intérieures et extérieures. Je m'efforcerai de traiter ce problème directement, d'après les principes de la théorie de l'élasticité, mais sans me servir des équations établies dans le cas plus général de l'équilibre élastique.

Le mouvement de l'eau dans la conduite ou la propagation de la pression pendant un coup de bélier donnent lieu à des équations analogues à celles de la propagation du courant ou du potentiel le long d'une antenne.

Il conviendra de faire appel à deux propriétés : la première c'est l'incompressibilité du liquide, elle nous donnera une équation, qu'on peut appeler *l'équation de continuité*, reliant la variation de la vitesse le long du tuyau à la variation subie à ce moment par le diamètre de la conduite en chacun de ses points; la seconde c'est l'équilibre existant entre les forces élastiques et les forces d'inertie; le théorème des quantités de mouvement nous fournira une équation reliant la variation en un point de la pression le long du tuyau à la variation instantanée de la vitesse au moment considéré.

Ce problème a un intérêt d'autant plus grand que les électriciens sont aujourd'hui appelés à s'occuper d'hydraulique.

J'aborde donc tout d'abord le problème élastique.

Considérons, dans la conduite circulaire, la tranche comprise entre deux sections normales à l'axe.

Il est clair tout d'abord que le mouvement de l'eau à l'intérieur de

Digitized by Google

la conduite ne produit aucun allongement sensible de celle-ci et que, par conséquent, la réaction élastique entre la tranche considérée et la tranche voisine peut être considérée comme nulle.

Maintenant découpons, par la pensée, la matière comprise entre deux surfaces cylindriques, concentriques avec la conduite, de rayons r et $r+dr$ à l'état de repos et prenons comme unité de longueur l'épaisseur de la tranche.

Sous l'action de la pression intérieure due à l'eau et de la pression atmosphérique extérieure, la tranche considérée S s'est déformée et des réactions élastiques sont nées ; mais, par raison de symétrie, on admettra que la surface cylindrique de rayon r est restée cylindrique en prenant une position concentrique telle que son rayon est devenu $r+\varepsilon$, ε étant une quantité infiniment petite, et en même temps la surface cylindrique de rayon $r+dr$ est devenue de rayon $r+dr+\varepsilon+\frac{d\varepsilon}{dr}dr$. Mais $\frac{d\varepsilon}{dr}$ est infiniment petit, la déformation étant supposée infiniment petite.

Cela posé, on peut découper, par la pensée, un petit élément matériel compris entre les deux surfaces cylindriques considérées et deux plans diamétraux longitudinaux faisant entre eux un angle $d\theta$ infiniment petit.

Ayant ainsi fixé notre attention sur un petit voussoir dont la dimension longitudinale est égale à l'unité de longueur et dont les deux autres dimensions sont dr dans le sens radial et $r\,d\theta$ dans le sens transversal, examinons les conditions de son équilibre pendant la déformation élastique. Sur la surface intérieure soit P la pression, sur la surface extérieure la pression sera

$$-\left(\mathrm{P}+\frac{d\mathrm{P}}{dr}\,dr\right),$$

en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier.

Sur les faces situées dans les plans méridiens, la réaction élastique, si la conduite tend à se gonfler, sera une tension Q qui, d'ailleurs, aura la même valeur sur les deux faces opposées. Seulement ces deux faces font entre elles un angle $d\theta$; je représenterai cette tension comme une pression négative $-$ Q subie par le petit élément considéré.

Cela posé, projetons toutes les forces sur le rayon qui coïncide

Digitized by Google

avec la perpendiculaire abaissée du centre de gravité du voussoir sur l'axe de la conduite.

On a, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$(298)\quad -P(r+\varepsilon)\,d\theta+\left(P+\frac{dP}{dr}\,dr\right)\left(r+dr+\varepsilon+\frac{d\varepsilon}{dr}\,dr\right)d\theta+Q\,d\theta\,dr=0$$

ou, comme ε et $\frac{d\varepsilon}{dr}$ sont infiniment petits,

$$(299)\quad P+Q+r\frac{dP}{dr}=0 \qquad \text{ou} \qquad (299\,bis)\quad \frac{d(Pr)}{dr}+Q=0,$$

telle est la relation donnée par la statique du corps solide.

D'autre part, les lois de l'élasticité (loi de Hooke) nous apprennent que les déformations sont proportionnelles aux forces élastiques qui les produisent, si celles-ci ne dépassent pas une certaine limite.

Quelles sont donc les dilatations? Le rayon r est devenu $r+\varepsilon$, la circonférence $2\pi r$ est devenue $2\pi(r+\varepsilon)$, la dilatation est donc $\frac{\varepsilon}{r}$, dans le sens tangentiel aux circonférences concentriques. Dans le sens normal à l'axe, l'épaisseur dr est devenue $dr+\frac{d\varepsilon}{dr}dr$, la dilatation est donc $\frac{d\varepsilon}{dr}$.

En introduisant les constantes élastiques E et μ et ayant égard au sens des forces, nous avons donc :

$$(300)\quad \frac{d\varepsilon}{dr}=-\frac{1}{E}(P+\mu Q),$$

$$(301)\quad \frac{\varepsilon}{r}=\frac{1}{E}(Q+\mu P);$$

d'où, en résolvant,

$$(302)\quad Q(1-\mu^2)=E\left(\mu\frac{d\varepsilon}{dr}+\frac{\varepsilon}{r}\right),$$

$$(303)\quad P(1-\mu^2)=E\left(-\frac{d\varepsilon}{dr}-\frac{\mu\varepsilon}{r}\right).$$

Telles sont les relations données par la physique.

Portons ces valeurs dans l'équation fournie par la statique, en remarquant que l'on a, en dérivant (303),

$$(304)\quad \frac{dP}{dr}(1-\mu^2)=E\left(-\frac{d^2\varepsilon}{dr^2}-\frac{\mu}{r}\frac{d\varepsilon}{dr}+\frac{\mu\varepsilon}{r^2}\right),$$

Digitized by Google

il vient, en supprimant le facteur constant $1-\mu^2$,

$$\mu\frac{d\varepsilon}{dr}+\frac{\varepsilon}{r}-\frac{d\varepsilon}{dr}-\frac{\mu\varepsilon}{r}-r\frac{d^2\varepsilon}{dr^2}-\mu\frac{d\varepsilon}{dr}+\frac{\mu\varepsilon}{r}=0. \tag{305}$$

Les termes dépendant de μ disparaissent.

Il reste

$$-r\frac{d^2\varepsilon}{dr^2}-\frac{d\varepsilon}{dr}+\frac{\varepsilon}{r}=0. \tag{306}$$

Or, la dilatation cubique, somme des deux dilatations $\frac{\varepsilon}{r}$ et $\frac{d\varepsilon}{dr}$, est égale à

$$\frac{\varepsilon}{r}+\frac{d\varepsilon}{dr},$$

et sa dérivée, par rapport à r, est égale à

$$-\frac{\varepsilon}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{d\varepsilon}{dr}+\frac{d^2\varepsilon}{dr^2},$$

quantité égale à zéro, d'après l'égalité précédente. On a donc, en appelant $2a$ une constante,

$$\frac{\varepsilon}{r}+\frac{d\varepsilon}{dr}=2a, \tag{307}$$

équation différentielle facile à intégrer. On obtient

$$\varepsilon=ar+\frac{b}{r},\quad \frac{d\varepsilon}{dr}=a-\frac{b}{r^2},\quad \frac{\varepsilon}{r}=a+\frac{b}{r^2}. \tag{308}$$

Reportons ces valeurs dans les expressions (302) et (303) de P et de Q, nous obtenons

$$Q(1-\mu^2)=E\left[(1+\mu)a+(1-\mu)\frac{b}{r^2}\right], \tag{309}$$

$$P(1-\mu^2)=E\left[-(1+\mu)a+(1-\mu)\frac{b}{r^2}\right]. \tag{310}$$

De ces équations, on tire les valeurs de P et Q, en déterminant les constantes arbitraires, de façon que P devienne égal à P_0 pour $r=r_0$ et à P_1 pour $r=r_1$; P_0 sera la pression de l'eau contenue dans la conduite; $-P_1$ sera la pression atmosphérique qui agit de l'extérieur et qui équilibre la pression élastique P_1.

Digitized by Google

On a ainsi, comme on le vérifie facilement à vue,

$$P = \frac{P_0 r_0^2 (r_1^2 - r^2) + P_1 r_1^2 (r^2 - r_0^2)}{(r_1^2 - r_0^2) r^2}, \tag{311}$$

$$Q = \frac{P_0 r_0^2 (r_1^2 + r^2) - P_1 r_1^2 (r^2 + r_0^2)}{(r_1^2 - r_0^2) r^2}. \tag{312}$$

Remarque I. — L'intégration nous a donné l'expression (308) de ε comme celle du déplacement qui correspond à la dilatation cubique constante $2a$, pour le système cylindrique considéré, lorsque ε est une simple fonction de r. Le résultat se justifie par les considérations physiques suivantes. Faisons égale à zéro la constante arbitraire b, alors ε se réduit à son premier terme et nous sommes dans le cas évident d'une dilatation uniforme perpendiculaire à l'axe.

Le terme en $\frac{b}{r}$ correspond donc à une déformation radiale où la dilatation est nulle. S'il s'agissait de l'espace à trois dimensions, il nous suffirait de considérer le mouvement rayonnant en tous sens d'un fluide incompressible provenant d'une source ponctuelle; la vitesse serait en raison inverse du carré de la distance; mais, comme nous avons affaire à un système cylindrique, il suffit de considérer le cas du plan. Plaçons à l'origine une source ponctuelle unique. Si à la distance r la vitesse est v, le flux radial $2\pi r v$ doit être constant et v varie en raison inverse de r. Si donc la vitesse est radiale et inversement proportionnelle à r, la divergence est nulle et le déplacement élémentaire a lieu sans dilatation. On retrouve ainsi le terme en $\frac{b}{r}$.

Remarque II. — Si r_0 et r_1 diffèrent très peu l'un de l'autre, P devra être négligé devant Q, car $\frac{P}{Q}$ est infiniment petit avec $r_1 - r_0$.

Remarque III. — Le calcul de l'énergie élastique, bien que non indispensable au problème que nous traitons, peut se faire comme suit.

Le travail des forces extérieures, c'est-à-dire des pressions, que j'appellerai $\mathfrak{T}$ est facile à calculer, si l'on tient compte de l'observation suivante, qui est d'un caractère très général.

Soient P_0 et P_1 les pressions pour les circonférences intérieure et extérieure, P et ε la pression et le déplacement sur la surface de

Digitized by Google

rayon r. Si nous remplaçons P_0 et P_1 par nP_0 et nP_1, l'équilibre élastique sera satisfait par des valeurs simultanées de P et de ε égales à nP et $n\varepsilon$, n étant une fraction quelconque. Si donc, nous faisons croître, à partir de zéro, les pressions intérieure et extérieure proportionnellement à leurs valeurs P_0 et P_1, la fraction n prendra les valeurs successives de 0 à 1 et le travail élémentaire de la pression intérieure étant

$$2\pi P_0 nr\varepsilon\, dn;$$

son travail total sera

$$2\pi P_0 r\varepsilon \int_0^1 n\, dn = \pi P_0 r\varepsilon,$$

on aura donc, d'après un calcul analogue pour P_1, pour le travail $\mathfrak{T}$ des pressions à partir de l'état naturel,

$$2\mathfrak{T} = 2\pi(P_0\varepsilon_0 r_0 - P_1\varepsilon_1 r_1), \tag{313}$$

ε_0 et ε_1 étant ce que devient ε pour $r = r_0$ et $r = r_1$.

Je dis que $2\mathfrak{T}$ est égal à l'intégrale double $2W$ ci-après :

$$2W = \iint \left(-P\frac{d\varepsilon}{dr} + Q\frac{\varepsilon}{r}\right) r\, dr\, d\theta. \tag{314}$$

En intégrant par parties le premier terme, on obtient, en effet,

$$2W = -\int_0^{2\pi} d\theta\, |Pr\varepsilon|_{r=r_0}^{r=r_1} + \int\int \left[\frac{d(Pr)}{dr} + Q\right]\frac{\varepsilon}{r} r\, dr\, d\theta. \tag{315}$$

Or, d'après la relation (283 *bis*), l'intégrale double disparaît. On a donc bien

$$2W - 2\mathfrak{T} = 0. \tag{316}$$

Ce qui prouve que W est l'énergie élastique. Remplaçons $\frac{\varepsilon}{r}$ et $\frac{d\varepsilon}{dr}$ par leurs expressions (300) et (301) en fonction de P et de Q; il vient

$$W = \frac{1}{2}\iint \frac{1}{E}(P^2 + Q^2 + 2\mu PQ) r\, d\theta\, dr. \tag{317}$$

Mais $r\, d\theta\, dr \times 1$ représente l'élément de volume. Donc l'énergie par unité de volume est

$$\frac{1}{2}\frac{1}{E}(P^2 + Q^2 + 2\mu PQ) \tag{318}$$

Digitized by Google

ou, simplement, si P est négligeable devant Q, comme cela a lieu pour les conduites de faible épaisseur,

$$\frac{1}{2}\frac{1}{E}Q^2. \tag{319}$$

Mise en équation. — Le problème d'élasticité étant résolu, examinons les réactions de la conduite et du liquide qu'elle contient.

1° Soient Ω l'aire de la section droite intérieure de la conduite et V la vitesse moyenne de l'eau, fluide incompressible.

La variation, pendant le temps dt, du volume d'eau compris dans le tronçon d'épaisseur dx est égale à l'excès de la quantité entrant d'un côté sur celle qui sort de l'autre; elle est aussi égale à $d\Omega\, dx$. On a, d'après cela,

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\Omega V)\,dx\,dt = \frac{\partial \Omega}{\partial t}\,dx\,dt. \tag{320}$$

Le tuyau restant sensiblement cylindrique, $\frac{d\Omega}{dx}$ est nul. Par suite

$$-\Omega\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial t}. \tag{321}$$

2° Comme Ω est proportionnel à D^2, on a

$$\frac{d\Omega}{\Omega} = 2\frac{dD}{D}. \tag{322}$$

Mais dD dépend de l'augmentation de pression dP_0.

Or la formule (312) donne

$$dQ = dP_0\frac{r_0^2(r_1^2 + r^2)}{(r_1^2 - r_0^2)r^2}, \tag{323}$$

qui se réduit ici à

$$dQ = dP_0\frac{D}{2e} \tag{324}$$

en appelant e l'épaisseur $r_1 - r_0$ supposée mince de l'enveloppe.

Mais la formule (301) se réduit ici à

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{1}{2E}Q \qquad \text{ou mieux} \qquad \frac{dD}{D} = \frac{dQ}{E}, \tag{325}$$

car il s'agit de la déformation due à l'accroissement de tension dQ;

Digitized by Google

d'où

$$\frac{d\Omega}{\Omega} = 2\,\frac{dD}{D} = \frac{2\,dQ}{E} = \frac{D}{Ee}\,dP_0. \tag{326}$$

De sorte que l'équation (321) devient

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{D}{Ee}\,\frac{\partial P_0}{\partial t}. \tag{327}$$

3° Le théorème des quantités de mouvement, appliqué à la même masse d'eau, fournit de son côté l'équation suivante, dans laquelle ρ désigne la densité du liquide :

$$\rho\Omega\,dx\,\frac{\partial V}{\partial t} = -\Omega\,\frac{\partial P_0}{\partial x}\,dx, \tag{328}$$

d'où

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial P_0}{\partial x}. \tag{329}$$

Les équations (327) et (329) sont les équations du problème posé.

Comparons les équations (327) et (329) à celles de l'antenne; on a, dans ce cas,

$$-\frac{\partial q'}{\partial x} = C\,\frac{\partial v}{\partial t}, \qquad -\frac{\partial v}{\partial x} = L\,\frac{\partial q'}{\partial t}, \tag{330}$$

v étant le potentiel de l'élément d'antenne d'abscisse x, au temps t, q' étant l'intensité du courant, C la capacité par unité de longueur, L le coefficient de self-induction par unité de longueur.

Admettons que la différence de potentiel v soit l'analogue de la pression et que la vitesse de l'électricité q' soit l'analogue de la vitesse du fluide, on aurait le tableau suivant :

$\frac{D}{Ee}$ représente la capacité C.

L représente la densité ρ.

Et, en effet, l'énergie potentielle élastique est d'après (319) et (324)

$$\frac{1}{2E}\,\frac{P_0^2\,D^2}{4e^2}\,\pi D e = \frac{\pi D^2}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{D}{Ee}\,P_0^2 \tag{331}$$

et l'énergie cinétique est

$$\frac{\pi D^2}{4}\,\frac{1}{2}\,\rho V^2. \tag{332}$$

Digitized by Google

L'élimination de V conduit finalement à l'équation du second ordre

$$\frac{\partial^2 P_0}{\partial t^2} = \frac{E e}{\rho D} \frac{\partial^2 P_0}{\partial t^2} \tag{333}$$

dont l'intégrale générale est

$$P_0 = F_1\left(x + \sqrt{\frac{E e}{\rho D}}\, t\right) + F_2\left(x - \sqrt{\frac{E e}{\rho D}}\, t\right), \tag{334}$$

F_1 et F_2 désignant deux fonctions arbitraires.

On voit par là que, quelles que soient les conditions initiales, les variations de pression résultent de la superposition de deux ondes cheminant en sens inverse avec la vitesse $\sqrt{\frac{E e}{\rho D}}$, beaucoup plus petite que la vitesse de propagation $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ des vibrations longitudinales.

En fait, à l'instant où le robinet se ferme, il ne peut exister qu'une seule onde, se propageant vers l'amont, jusqu'à ce qu'elle arrive à l'origine de la conduite, où elle se réfléchit en revenant vers le robinet et ainsi de suite.

La vitesse V obéit à des lois analogues.

Après avoir relevé les ressemblances entre le problème mécanique et le problème électrique, il n'est peut-être pas inutile de signaler aussi quelque différence.

Les deux surfaces cylindriques de rayons r_0 et r_1 de la conduite sont soumises à des pressions dirigées en sens contraire qui tendent à les rapprocher, comme les charges électriques opposées des deux armatures d'un condensateur cylindrique. En même temps, dans le sens transversal, il y a une dilatation.

C'est aussi ce qui se produit dans le champ électrique, mais les tensions et pressions n'ont pas la même valeur, car, tandis que dans le champ électrostatique la divergence du déplacement est nulle, ici la dilatation cubique, au lieu d'être nulle, est une constante $2a$, conformément à ce qu'indique l'équation (307).

En revanche, il y a lieu de relever l'analogie qui existe entre les relations (300) et (301) et celles qui relient dans le champ électrostatique les charges aux potentiels, ces deux relations relient les dilatations aux pressions. Dans les deux cas, on a des relations linéaires.

Il y a entre un grand nombre de théories physiques des analogies

Digitized by Google

toutes formelles, résultant d'un caractère commun qui se retrouve dans les relations qui relient les effets et les causes.

Vecteur à n composantes.

Le cas le plus simple est celui où ces relations sont linéaires. C'est ainsi que les vitesses d'un système à liaison sont des fonctions linéaires et homogènes des impulsions qui sont susceptibles de porter chaque élément de l'état de repos à l'état de mouvement où il se trouve actuellement.

Dans la théorie de Maxwell, c'est cette propriété même qui est étendue aux systèmes de courants; les vitesses ont pour homologues les intensités de courant et les quantités de mouvement ont pour homologues les flux d'induction magnétique.

De même, ainsi que nous l'avons vu pour l'état d'équilibre élastique de la conduite dans la théorie du coup de bélier, il y a relation linéaire, en vertu de la loi de Hooke, entre les dilatations du corps et les forces élastiques qui naissent de la déformation et contre-balancent les forces extérieures agissantes.

C'est pour une raison semblable que le déplacement électrique de Maxwell est une fonction vectorielle linéaire de la force électrique.

De même, et par une conséquence immédiate, si l'on envisage dans un milieu diélectrique homogène un système de corps conducteurs, les charges électriques sont des fonctions linéaires des potentiels.

Dans tous ces cas, l'énergie est représentée par la demi-somme des produits de deux facteurs : l'un est un facteur de quantité, l'autre le facteur de qualité correspondant, l'expression de l'énergie est une forme quadratique définie positive soit des facteurs de qualité, soit des facteurs de quantité.

Examinons, par exemple, le champ électrostatique : si les potentiels sont désignés par la lettre V et les charges par la lettre Q d'une façon générale, les indices se rapportant aux conducteurs qu'ils servaient à désigner, on aura, pour l'énergie W,

$$2W = V_i Q^{(i)} \quad \text{(en sous-entendant le signe } \Sigma\text{)}.$$

Si, au lieu de Q, on prend comme variables indépendantes q des fonctions linéaires distinctes des Q, cela reviendra à opérer une trans-

Digitized by Google

formation définie par les équations

$$q^i = \alpha_r^i \mathrm{Q}^r \qquad |\alpha_r^i| \neq 0,$$

$|\alpha_i^{(r)}|$ étant le déterminant de la substitution et si, au lieu des V, on prend pour variables des fonctions linéaires v des anciens V,

$$v_i = \overline{\alpha}_{(i)}^r \mathrm{V}_r \qquad |\overline{\alpha}_i^r| \neq 0,$$

à condition que les deux transformations $|\alpha_{(r)}^i|$ et $|\overline{\alpha}_{(i)}^r|$ soient inverses l'une de l'autre, on aura encore

$$2\mathrm{W} = v_i q^{(i)},$$

D'après cela, l'état du champ électrique, quand on envisage n conducteurs, peut être caractérisé par deux sortes de variables, les Q et les V, et l'on peut représenter cet état par un vecteur dans un espace à n dimensions.

Les composantes de ce vecteur sont de deux sortes, ou bien on peut se donner les Q ou bien on peut se donner les V; et il importe de remarquer que ces deux espèces de composantes se transforment par des substitutions inverses.

On a d'ailleurs

$$\mathrm{Q}^i = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{W}_v}{\partial \mathrm{V}_i}, \qquad \mathrm{V}_i = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{W}_q}{\partial \mathrm{Q}^i}.$$

Dans le cas particulier, où par des changements linéaires de variables, on aurait ramené W à être une somme de carrés

$$2\mathrm{W} = \Sigma q^{(i)2},$$

on aurait

$$v_i = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial q^{(i)}} = q^{(i)}$$

et les deux espèces de composantes se confondraient l'une avec l'autre. Dans ce cas, $\sqrt{2\mathrm{W}}$ se comporterait comme la longueur d'un vecteur dans un espace cartésien à n dimensions. L'énergie représente donc, à un facteur numérique près, la longueur du vecteur représentatif de l'état électrique du système envisagé.

Ces considérations n'ont pas, en elles-mêmes, d'intérêt immédiat; mais elles pourraient servir d'introduction à une théorie des tenseurs, en permettant de fixer les idées, par la signification des symboles.

Digitized by Google

Systèmes conservatifs et systèmes non isolés.

L'état de conducteurs chargés dans un milieu diélectrique peut être défini soit par les charges des conducteurs, soit par les potentiels auxquels ces charges sont portées. Mais au point de vue des réactions qui se produisent et de l'énergie du milieu, il n'est pas indifférent de se donner les charges, qu'on supposera constantes pour avoir été communiquées à un corps qui demeure ensuite entouré d'un isolant ou de se donner les potentiels, qu'on suppose constants, parce que le corps continue à demeurer en liaison par un fil conducteur de capacité négligeable avec telle ou telle source extérieure, dont le potentiel se maintient, par exemple, grâce à une réaction chimique, comme celle des piles.

Si, en effet, le système est laissé à lui-même et se déforme, par suite de la variation d'un des paramètres géométriques qui définissent sa configuration, les forces électriques en jeu produiront un certain travail aux dépens de l'énergie du milieu.

Si, au contraire, la même déformation se produit pendant que les sources maintiennent les potentiels, les forces électriques produiront bien le même travail, mais on démontre aisément que l'énergie du milieu augmente de la même quantité, de sorte que les sources auront à fournir au système une quantité d'énergie double, répartie par moitié entre le travail effectué et l'augmentation d'énergie.

Énergie dynamique et régulateur à force centrifuge.

L'analogie mécanique de ces phénomènes est simple. La force vive d'un système mécanique soumis à des liaisons indépendantes du temps est une fonction quadratique des vitesses ou des quantités de mouvement et l'on peut maintenir les vitesses constantes, grâce à l'action d'un moteur extérieur ou, au contraire, abandonner le système à lui-même de façon que les quantités de mouvement demeurent invariables.

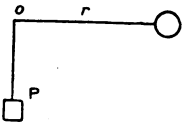
Supposons, par exemple, un régulateur à boules dont le manchon est chargé d'un poids et qui passe d'un état de régime à un autre. Si on le laisse à lui-même, la force qui agit sur la boule est une force centrale et le moment cinétique reste constant. On a donc

$$Mr^2\omega = \text{const.},$$

Digitized by Google

M étant la masse, r sa distance à l'axe, ω la vitesse de rotation. Or $Mr^2\omega$ est bien, dans le mouvement circulaire, la quantité de mouvement généralisée relative à la variable dont ω est la vitesse ou à la coordonnée ω. En ce cas, le travail de la force centrifuge sera emprunté

Fig. 10.



à l'énergie cinétique. Si, au contraire, on rétablit la liaison avec le moteur et qu'on augmente sa vitesse de régime, de façon à augmenter r de dr comme dans le premier cas, le moteur devra fournir le travail de la force centrifuge et subvenir également à l'augmentation de l'énergie cinétique des boules qui, dans ce cas, se sera accrue de la quantité dont elle avait diminué dans le premier cas. Il faudrait donc pour l'analogie établir une correspondance entre les charges et les quantités de mouvement et entre les potentiels et les vitesses.

Signes des réactions.

Si l'on considère l'énergie cinétique du champ des courants, il faudra assimiler les intensités de ces courants aux vitesses et faire correspondre aux flux embrassés par chaque courant les quantités de mouvement généralisées.

Quand on examine l'action réciproque de deux tourbillons au sein d'un liquide indéfini, le système est isolé de toute source d'énergie et les réactions seront semblables à celles de feuillets magnétiques, parce que ceux-ci constituent un système conservatif.

Au contraire, quand on examine l'action réciproque de deux courants entretenus à une intensité constante par des piles voltaïques, il faut les assimiler à des tourbillons dont on maintiendrait l'intensité par quelque action mécanique extérieure. Le système n'est plus un système isolé.

C'est Vaschy qui, dans l'un de ses premiers travaux, a montré les erreurs de signe que l'on risquerait de commettre dans l'évaluation de l'énergie en négligeant d'observer le caractère conservatif ou non conservatif du système envisagé.

Digitized by Google

CHAPITRE VI.

LA LAMPE GÉNÉRATRICE D'OSCILLATIONS.

Lignes de flux d'induction électrostatique. Lignes de courant.

Considérons un système de conducteurs chargés en équilibre électrostatique dans un milieu isolant et imaginons qu'un électron parte du voisinage de l'un des conducteurs dans le sens de la force électrique ; cet électron, étant de masse négligeable, suivra la ligne d'induction sans s'en écarter et il aboutira à une plage chargée positivement d'un des autres conducteurs du champ. Il suivrait également le même chemin si l'on admettait qu'à chaque instant son mouvement est régularisé par la viscosité qui l'obligerait à avoir sa vitesse constamment dans la direction de la force agissante. Dans l'un et l'autre cas, la trajectoire se confond avec la ligne de flux d'induction, c'est-à-dire avec la ligne tangente en chaque point au déplacement électrique. Il résulte de là que si, au lieu d'avoir un seul électron, on en a toute une série, les trajectoires de ces électrons seront les lignes de flux, pourvu que les électrons soient assez écartés les uns des autres sur une même trajectoire quelconque, pour que l'on puisse négliger leurs attractions mutuelles. Si l'on suppose maintenant les potentiels suffisants pour extraire les électrons de l'intérieur des conducteurs, lorsque l'agitation thermique amène ceux-ci dans le voisinage immédiat de la surface, il y aura, de conducteur à conducteur, des courants qui seront proportionnels aux flux d'induction et les charges que nous avons considérées jusqu'à présent seront proportionnelles aux flux que nous imaginons maintenant.

Dès lors, dans un pareil milieu, il y aurait superposition du pouvoir conducteur au pouvoir inducteur spécifique.

On pourrait écrire que les courants sont des fonctions linéaires des potentiels.

Il faut d'ailleurs observer que ces conclusions cesseraient d'être

Digitized by Google

valables si les charges devenaient assez considérables en certains points du milieu pour modifier les trajectoires.

D'autres modifications se produiraient si l'ionisation par chocs entrait en jeu, et si l'on avait à tenir compte des phénomènes de recombinaison, etc.

Équation caractéristique de la lampe à trois électrodes.

Considérons maintenant une lampe à trois électrodes.

La plaque est portée à un potentiel élevé.

Le filament est maintenu à l'incandescence.

La grille est l'électrode qui règle la distribution; elle commande le passage du courant.

Nous avons là trois conducteurs en présence et il y a trois flux d'électrons, mais seul est important, quand il est autorisé par l'électrode de commande, le courant plaque-filament.

Si cette électrode de commande a un potentiel oscillatoire, le courant plaque-filament a une intensité qui est la somme d'une partie constante et d'une partie j variable et l'on a

$$\rho j = v + ku$$

en appelant :

ρ la résistance entre la plaque et le filament;

k le facteur d'amplification en volts de la lampe;

$u_0 + u$, $v_0 + v$ les différences de potentiel entre la grille et le filament d'une part, entre la plaque et le filament d'autre part, u_0 et v_0 étant les potentiels constants lorsqu'il n'y a pas d'oscillations;

$j_0 + j$ l'intensité du courant dans le circuit de plaque, j_0 étant l'intensité constante de ce courant en l'absence d'oscillation.

Génération des oscillations. Horloge.

L'audion générateur d'oscillations est un dispositif qui présente certaines analogies avec le mécanisme d'une horloge.

Si l'on manœuvre à la main le balancier d'une horloge en le faisant osciller, il entraînera la fourchette. Comme la roue d'échappement est sollicitée par un ressort produisant un couple constant, l'ancre laissera passer à chaque période une dent de cette roue. On sait qu'on

Digitized by Google

peut profiter de ce passage pour entretenir automatiquement le mouvement.

Pendant que l'ancre oscille, la dent glisse tout d'abord sur un repos, puis quand elle est libérée, elle quitte son appui puisqu'elle part sans vitesse et que cet appui est déjà en mouvement; mais bientôt, l'action du ressort lui donne une accélération suffisante pour qu'elle vienne produire un choc contre le plan incliné au-dessous duquel elle échappe en glissant, et en communiquant ainsi au balancier une certaine partie de sa force vive.

Sous l'influence de ces chocs successifs, un état de régime s'établit, correspondant à une période T et à une amplitude α reliées par la relation

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}\left(1+\frac{\alpha^2}{16}\right)}$$

en appelant l la longueur du pendule, g l'accélération due à la pesanteur.

Comme le balancier entraîne avec lui une certaine masse d'air, la longueur l ne dépendra pas seulement de la longueur de la tige, et pour maintenir la constance de T, il conviendra non seulement d'employer pour cette tige un métal à coefficient de dilatation (1) avec la température aussi faible que possible comme l'alliage d'invar dû à M. Ch.-Ed. Guillaume, mais encore d'opérer à température et pression constante pour que l'air entraîné conserve la même masse et que les remous ne soient pas modifiés par des différences de viscosité.

Horloge Féry-Brillié.

Au lieu de l'entretien par un ressort, on peut, comme dans l'audion générateur d'oscillation, utiliser l'énergie d'une pile.

Le dessin ci-après donne le schéma d'une pendule Féry, construite par MM. Brillié frères (*fig.* 11).

Le réglage de l'amplitude des oscillations est obtenu automatiquement par la force contre-électromotrice développée dans la bobine par le mouvement même de l'aimant.

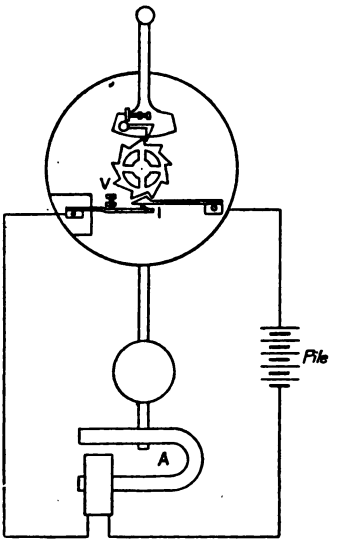
---

(1) Le métal employé n'est pas l'invar, qui manque de stabilité, mais il s'en rapproche, et la dilatation de la boule de laiton compense par un sens d'attache convenable la faible dilatation de la tige.

Digitized by Google

A cet effet, le flux magnétique de l'aimant et les spires de la bobine sont établis de telle sorte que, pour l'amplitude maximum que ne doit pas dépasser le pendule, amplitude légèrement supérieure à l'amplitude normale, la force contre-électromotrice mentionnée ci-

Fig. 11.



Horloge indépendante Féry

dessus devienne égale à la force électromotrice de la pile; pour l'amplitude maximum du pendule, il ne passerait donc plus aucun courant dans la bobine et le pendule ne recevrait pas d'impulsion. En fait, le pendule se réglera de lui-même à une amplitude de régime légèrement inférieure à ladite amplitude.

Pour cette amplitude de régime, la vitesse ayant diminué, la force contre-électromotrice aura également diminué et, à chaque oscillation, il passera dans la bobine exactement la quantité de courant nécessaire pour contre-balancer les pertes dues aux résistances passives. La durée du courant est d'ailleurs aussi longue que le permet le dispositif mécanique. Les mesures montrent que l'intensité du courant se trouve réduite à 0,1 milliampère seulement, ce qui assure une durée indéfinie des contacts.

La très grande importance que présente cette utilisation de la force contre-électromotrice, pour la régularité de l'amplitude, peut être

Digitized by Google

facilement mise en évidence graphiquement. Portant en abscisses les amplitudes des oscillations, en ordonnées la force contre-électromotrice d'induction, les durées d'oscillations étant sensiblement indépendantes de l'amplitude, la vitesse de déplacement de l'aimant dans la bobine et, par suite, les forces électromotrices d'induction seront représentées par une droite telle que OA (*fig.* 12) : soit OB la force électromotrice de la pile; la parallèle à l'axe des abscisses menée par le point B, rencontre OA en un point D qui correspond à l'amplitude O*d* pour laquelle le balancier ne recevrait

Fig. 12.

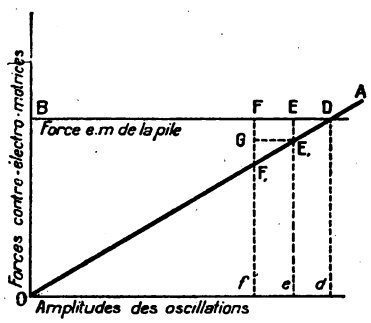
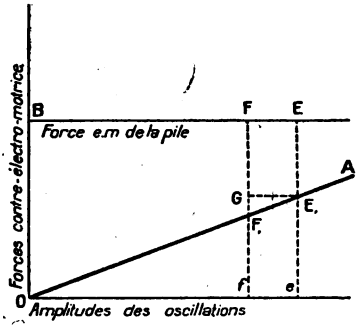


Fig. 12 *bis*.



plus aucune impulsion, amplitude maximum que le balancier n'atteindra jamais pratiquement; le balancier se réglera de lui-même à une amplitude O*e*, telle que le courant correspondant à la différence EE_1 entre la force contre-électromotrice et la force électromotrice de la pile donne une impulsion qui contre-balance exactement les résistances passives. On peut facilement mesurer sur un pendule en marche la valeur de la différence EE_1, différence que l'on trouve environ égale au septième de la force électromotrice de la pile. On a donc, sur la figure 12,

$$Oe = \frac{6}{7} Od.$$

Supposons (*fig.* 12 et 12 *bis*) que les résistances passives augmentent dans des proportions telles que le courant, à chaque oscillation, doive doubler de valeur, l'amplitude se réglera à une valeur O*f* telle que

$$FF_1 = 2EE_1$$

et, par suite,

$$Of = \frac{5}{7} Od,$$

Digitized by Google

l'amplitude aura donc diminué seulement du sixième, soit 16 pour 100 environ de sa valeur primitive.

Le chemin parcouru par le pendule pendant la durée du contact ayant toujours la même longueur, l'énergie transmise au pendule a doublé; on voit donc que, avec le dispositif ci-dessus, alors que les résistances passives doublent de valeur, l'amplitude ne diminue que de 16 pour 100.

Si, au contraire, pour l'amplitude normale, la force électromotrice est franchement inférieure à celle de la pile, la moitié par exemple, on trouve (*fig.* 12 et 12 *bis*) que dans le cas où les résistances passives doubleraient, le pendule s'arrêterait; une diminution d'amplitude de 16 pour 100 correspondrait à une augmentation des résistances passives de $\frac{GF_1}{EE_1}$ ou 16 pour 100.

Théorie de l'entretien des oscillations.

Il est facile de suivre d'une façon un peu plus minutieuse le fonctionnement de l'entretien en ayant recours aux équations de la Mécanique.

Soient :

α l'angle d'écart du pendule à partir de la verticale, qui est la position d'équilibre stable;

α', α'' ses dérivées première et seconde par rapport au temps;

I le moment d'inertie du pendule (en y comprenant la boule et l'aimant);

f un coefficient destiné à tenir compte de la viscosité de l'air;

C le couple directeur dû à la pesanteur.

Lorsque le pendule oscille librement et qu'aucun courant ne passe dans le solénoïde, on a

$$I\alpha'' + f\alpha' + C\alpha = 0. \tag{1}$$

J'écrirai cette équation sous une forme un peu plus simple, savoir :

$$\alpha'' + 2\xi\alpha' + r^2\alpha = 0, \tag{2}$$

en posant

$$2\xi = \frac{f}{I}, \qquad r^2 = \frac{C}{I}. \tag{3}$$

Digitized by Google

D'ailleurs, il sera commode de poser

$$\xi = -r\cos\theta, \tag{4}$$

$$\omega = r\sin\theta. \tag{5}$$

On aura alors, en admettant que l'on compte les temps à partir du passage par la verticale, et en appelant α'_0 la vitesse angulaire à ce moment :

$$\alpha = \frac{\alpha'_0}{\omega} e^{-\beta t}\sin\omega t, \tag{6}$$

$$\alpha' = \frac{\alpha'_0 r}{\omega} e^{-\beta t}\sin(\omega t + \theta). \tag{7}$$

Et l'amplitude maximum α_M de α sera

$$\alpha_M = \frac{\alpha'_0}{r} e^{-\beta\frac{\pi-\theta}{\omega}}. \tag{8}$$

Parti avec la vitesse angulaire α'_0, le pendule repassera dans le même sens par la verticale, au bout d'une période $\left(T = \frac{2\pi}{\omega}\right)$ avec la vitesse angulaire α'_1 donnée par l'équation

$$\alpha'_1 = \alpha'_0 e^{-\frac{\beta 2\pi}{\omega}}. \tag{9}$$

Le mécanisme d'entretien consistera à envoyer dans le solénoïde, pendant un temps très court τ, un courant i, qui donnera une impulsion ramenant la vitesse angulaire à sa valeur initiale α'_0.

La force électromagnétique est égale au produit de trois facteurs : l'intensité du courant i, l'intensité du champ magnétique H et la longueur du fil exposé à l'action de ce champ. Si S est la surface polaire, e l'épaisseur du fil, n le nombre de couches du solénoïde, cette longueur de fil est $n\frac{S}{e}$.

On peut admettre que cette force est horizontale. Si l est la distance à l'axe de suspension du milieu de l'entrefer, le moment de la force électromagnétique est Gi; en posant

$$G = \frac{Hn S}{el}, \tag{10}$$

le moment de l'impulsion sera $Gi\tau$ et l'accroissement du moment

Digitized by Google

cinétique sera $I(\alpha'_0 - \alpha'_1)$. On aura donc

$$I(\alpha'_0 - \alpha'_1) = Gi\tau. \tag{11}$$

Il est facile d'avoir le courant i. La force contre-électromotrice est due au déplacement du fil dans le champ; si j'appelle α'_m une valeur de la vitesse angulaire intermédiaire entre α'_0 et α'_1, j'aurai, pour cette force contre-électromotrice d'induction,

$$H\frac{nS}{e}l\alpha'_m. \tag{12}$$

Mais comme l'impulsion est très petite, si l'amortissement dû à β n'est pas trop grand, on pourra, sans grande erreur, confondre α'_m avec α'_0; et l'on aura

$$i = \frac{E - \frac{HnS}{e}l\alpha'_0}{R}, \tag{13}$$

en appelant R la résistance du circuit.

Quant à τ, c'est une durée qui ne varie pas, tant que la période du pendule reste constante, ce qui est à peu près le cas.

On peut exprimer $\alpha'_1 - \alpha'_0$ en fonction de l'élongation maximum, et l'on trouve

$$\alpha'_0 = \alpha_M r e^{\beta\frac{\pi-\theta}{\omega}}, \qquad \alpha'_1 = \alpha_M r e^{-\frac{\beta}{\omega}(\pi+\theta)}, \tag{14}$$

d'où

$$\alpha'_0 - \alpha'_1 = 2\alpha_M r e^{-\frac{\beta\theta}{\omega}} \operatorname{sh}\frac{\beta\pi}{\omega} \tag{15}$$

ou, en première approximation, β étant assez petit pour qu'on puisse négliger son carré,

$$\alpha'_0 - \alpha_1 = 2\alpha_M r\frac{\beta\pi}{\omega} = 2\alpha_M\beta\pi \tag{16}$$

et l'on aura pour condition d'entretien

$$2\alpha_M\pi I\beta = Gi\tau. \tag{17}$$

Remarquons que l'énergie dissipée pendant une période depuis $t = 0$ jusqu'à $t = T$, par suite de la viscosité de l'air, est égale à la perte de force vive entre deux passages dans le même sens par la

Digitized by Google

verticale, c'est-à-dire à

$$\frac{1}{2} I(\alpha_0'^2 - \alpha_1'^2)$$

ou à

$$\frac{1}{2} I(\alpha_0' - \alpha_1')(\alpha_0' + \alpha_1') = G i \tau \frac{\alpha_0' + \alpha_1'}{2}. \tag{18}$$

Comme la vitesse $\frac{\alpha_0' + \alpha_1'}{2}$ et τ varient peu, si l'entretien se fait dans de bonnes conditions, il en résulte que, si l'énergie à restituer vient à doubler, il faut doubler i.

Or on avait, pour déterminer i, une équation de la forme

$$Ri = E - K\alpha_M, \tag{19}$$

puisque α_0' est sensiblement proportionnel à α_M, pourvu que β reste petit. Mais β, tout en restant petit, peut, en devenant double, doubler la perte d'énergie. Prenons les dérivées logarithmiques, de l'équation précédente, on aura

$$\frac{\Delta i}{i} = \frac{-K\Delta\alpha_M}{E - K\alpha_M}. \tag{20}$$

Posons, par exemple, $\frac{\Delta i}{i} = 2$, si nous supposons que le calcul du solénoïde ait été fait de façon à avoir

$$E - K\alpha_M = \varepsilon, \tag{21}$$

ε étant une quantité très petite, on aura sensiblement

$$K = \frac{E}{\alpha_M} \tag{22}$$

et il viendra

$$2 = -\frac{E}{\alpha_M}\frac{\Delta\alpha_M}{\varepsilon}$$

ou

$$\frac{\Delta\alpha_M}{\alpha_M} = -\frac{2}{E}\varepsilon, \tag{23}$$

de sorte que l'amplitude ne variera que d'un faible pourcentage de sa valeur, si ε est petit.

Comme les remous dépendent surtout de cette amplitude, il y a le plus grand intérêt à la maintenir constante, quelles que soient les autres causes d'amortissement pouvant influer sur β.

Digitized by Google

Il est bien remarquable que, lorsque l'entretien est ainsi effectué au moyen d'une impulsion donnée au pendule lors de son passage par la verticale, la période $\left(T = \frac{2\pi}{\omega}\right)$ ne change pas ou, pour mieux dire, la pseudo-période T devient la période véritable du mouvement entretenu.

On a donc un mouvement harmonique de période T, pendant lequel le facteur d'amplitude va constamment en décroissant, de sorte que l'amplitude moyenne est différente de l'amplitude α_M, maximum, que nous avons considérée plus haut.

De plus, cette variation du facteur d'amplitude donne lieu à une interprétation nouvelle. Le mouvement étant un mouvement périodique de période T, on peut le considérer comme la superposition d'un mouvement harmonique fondamental et de ses harmoniques de divers ordres.

Pour avoir ces harmoniques, il suffit de développer en série de Fourier l'expression

$$e^{-\beta t}\sin\omega t. \tag{24}$$

Nous avons

$$e^{-\beta t}\sin\omega t = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-\beta\gamma}\sin\omega\gamma\left[1 + 2\sum_1^\infty \cos n\omega(\gamma - t)\right]d\gamma. \tag{25}$$

On a tout d'abord pour primitive de

$$e^{-\beta\gamma}\sin\omega\gamma$$

la fonction

$$\frac{e^{-\beta\gamma}}{r}\sin(\omega\gamma - 0).$$

La différence des valeurs de cette fonction primitive pour $t = 0$ et $t = T$, divisée par T, donne la valeur moyenne de l'élongation, valeur qui serait nulle si les oscillations n'étaient pas amorties et qui est ici égale à

$$\frac{1 - e^{-\beta t}}{Tr}\sin 0, \tag{26}$$

c'est-à-dire de l'ordre de grandeur de β, si l'on suppose β infiniment petit. C'est le premier terme du développement.

Nous développerons ensuite $\sin(n\omega\gamma - n\omega t)$ et nous remplace-

Digitized by Google

rons les produits de lignes trigonométriques par des sommes ou des différences. Nous avons ainsi

$$(27)\quad 2\sin\omega\gamma\cos n\omega(\gamma-t)=\cos n\omega t[\sin(n+1)\omega\gamma-\sin(n-1)\omega\gamma]+\sin n\omega t[\cos(n-1)\omega\gamma-\cos(n+1)\omega\gamma].$$

Considérant alors la fonction périodique amortie z,

$$(28)\qquad z=e^{-\beta t}\sin m\omega t \qquad \text{où } m \text{ est entier :}$$

je poserai

$$(29)\qquad \begin{cases} r_m\cos\theta_m=-\beta, \\ r_m\sin\theta_m=m\omega, \end{cases}$$

d'où

$$(30)\qquad r_m^2=(m\omega)^2+\beta^2$$

et j'aurai pour fonction primitive de z la fonction

$$(31)\qquad \int z\,dt=\frac{e^{-\beta t}}{r_m}\sin(m\omega t-\theta_m)$$

dont l'accroissement moyen entre o et T est

$$(32)\qquad \frac{1-e^{-\beta T}}{T}\,\frac{\sin\theta_m}{r_m}.$$

On obtient ainsi le terme général du développement, savoir :

$$(33)\quad \frac{1}{T}\int_0^T e^{-\beta\gamma}\,2\sin n\omega\cos n\omega(\gamma-t)\,d\gamma$$
$$=\frac{1-e^{-\beta T}}{T}\left[\cos n\omega t\left(\frac{\sin\theta_{n+1}}{r_{n+1}}-\frac{\sin\theta_{n-1}}{r_{n-1}}\right)-\sin n\omega t\left(\frac{\cos\theta_{n-1}}{r_{n-1}}-\frac{\cos\theta_{n+1}}{r_{n+1}}\right)\right]$$
$$=\frac{1-e^{-\beta T}}{T}\,\frac{\cos(n\omega t-\psi_n)}{A_n}$$

en posant

$$(34)\qquad \begin{cases} \frac{1}{A_n}\cos\psi_n=\frac{\sin\theta_{n+1}}{r_{n+1}}-\frac{\sin\theta_{n-1}}{r_{n+1}}, \\ \frac{1}{A_n}\sin\psi_n=\frac{\cos\theta_{n+1}}{r_{n+1}}-\frac{\cos\theta_{n-1}}{r_{n-1}}. \end{cases}$$

Le développement de la fonction considérée en série de Fourier est donc ainsi obtenu.

On peut arriver à une forme analogue par une voie un peu différente, en se servant de la fonction u, de Heaviside. Cette fonction

Digitized by Google

est définie par l'égalité

$$u = \frac{1}{T}\left[1 + 2\Sigma \cos\frac{2n\pi}{T}(t-x)\right], \tag{35}$$

c'est une fonction de t qui a partout la valeur zéro, à l'exception de l'époque $t = x$, pour laquelle elle devient infinie, mais de façon que l'intégrale de temps de u conserve une valeur finie; d'ailleurs, cette valeur est égale à l'unité.

Or la fonction amplitude (6) que nous avons envisagée

$$\alpha = \frac{\alpha'_0}{\omega} e^{-\beta t} \sin\omega t \tag{36}$$

correspond à une impulsion

$$\alpha'_0 - \alpha'_1 = \alpha'_0 (1 - e^{-\beta T}).$$

Donc la fonction

$$e^{-\beta t} \sin\omega t$$

correspond à l'impulsion

$$\frac{\omega}{\alpha'_0}\alpha'_0(1 - e^{-\beta T}) = 2\pi\frac{(1 - e^{-\beta T})}{T}.$$

Il convient donc de multiplier par ce facteur le résultat obtenu en considérant l'impulsion $\int u\,dt = 1$.

Soit donc l'équation du mouvement

$$\alpha'' + 2\beta\alpha' + r^2\alpha = \frac{1}{T}\left(1 + 2\Sigma\cos\frac{2n\pi}{T}t\right). \tag{37}$$

Nous aurons d'abord $\frac{1}{r^2 T}$ pour terme constant.

Cherchons le terme v_n qui correspond à la force appliquée $\frac{2}{T}\cos\frac{2n\pi}{T}t$: il sera de la forme

$$v_n = \frac{2}{TB_n}\cos(n\omega t - \Im_n). \tag{38}$$

Et en substituant dans l'équation différentielle, nous devrons obtenir une identité, si B_n et $\Im_n$ sont choisis convenablement. Or on a ainsi

$$\frac{2}{TB_n}[(-n^2\omega^2 + r^2)\cos(n\omega t - \Im_n) - 2\beta n\omega \sin(n\omega t - \Im_n)] = \frac{2}{T}\cos n\omega t. \tag{39}$$

Il suffira donc d'écrire

$$B_n \cos\Im_n = -n^2\omega^2 + r^2, \qquad B_n \sin\Im_n = 2\beta n\omega, \tag{40}$$

Digitized by Google

d'où

$$(41)\qquad \operatorname{tang}\Im_n = \frac{2\beta n\omega}{-n^2\omega^2 + r^2}, \qquad B_n^2 = (-n^2\omega^2 + r^2) + 4\beta^2 n^2\omega^2.$$

Il resterait à vérifier que ces valeurs de B_n et de $\Im_n$ conduisent aux valeurs données plus haut pour A_n et ψ_n. Quoi qu'il en soit, on a

$$(42)\qquad \alpha = 2\pi\frac{1-e^{-\beta T}}{T}\left[\frac{1}{r^2 T} + \sum\frac{2}{T}\frac{\cos(n\omega t - \Im_n)}{B_n}\right].$$

Il convient cependant d'examiner plus attentivement les premiers termes de la série de Fourier, de façon à se rendre compte de l'amplitude du terme fondamental.

On a pour

$$n = 1, \qquad r_{n-1} = r_0, \qquad r_{n+1} = r_2, \qquad \theta_0 = 0, \qquad r_0 = -\beta,$$

$$r_0\cos\theta_0 = -\beta,$$

$$r_0\sin\theta_0 = 0$$

et

$$r_2\cos\theta_2 = -\beta, \qquad \theta_2 = \operatorname{arc\,tang}\frac{2\omega}{-\beta}, \qquad r_2 = \sqrt{4\omega^2 + \beta^2},$$

$$r_2\sin\theta_2 = 2\omega,$$

et le terme fondamental devient, d'après (34),

$$(43)\qquad \frac{1-e^{-\beta T}}{T}\left[\cos\omega t\frac{\sin\theta_2}{r_2} + \sin\omega t\left(\frac{1}{\beta} + \frac{\cos\theta_2}{r_2}\right)\right].$$

Si β est assez petit, le terme prépondérant est $\frac{1}{\beta}\sin\omega t$ à l'intérieur de la parenthèse, et par suite, le terme fondamental lui-même diffère peu de $\sin\omega t$, vérification tout indiquée par le sentiment du phénomène mécanique.

Quant au terme constant qui représente la déviation moyenne du pendule par rapport à la verticale, on vérifie aisément l'égalité des deux valeurs obtenues par l'une et l'autre méthode, car on a

$$\frac{1-e^{-\beta T}}{Tr}\sin 0 \equiv 2\pi\frac{1-e^{-\beta T}}{T}\frac{1}{r^2 T},$$

puisque l'on a

$$r\sin 0 = \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Digitized by Google

Entretien des oscillations par l'audion.

Après avoir considéré le mouvement entretenu du pendule, je passe à un mécanisme fort analogue, celui qui est constitué par l'audion générateur (*fig.* 13 et 14, p. 124).

Je considère tout d'abord un circuit oscillant. Ce circuit comporte un condensateur de capacité C et un solénoïde de résistance R et de coefficient de self-induction L.

Soit, d'autre part, (℘) une lampe à trois électrodes, dont le filament est entretenu à l'incandescence par une batterie de deux accumulateurs, par exemple. Je porte la plaque à un potentiel positif d'un centaine de volts au moyen d'une pile dont le pôle négatif est relié à travers le solénoïde du circuit oscillant au pôle négatif des accumulateurs de chauffage.

Il y a entre le filament et la plaque un flux d'électrons, ce qui correspond à un courant d'intensité j_0 allant de la plaque au filament.

Je relie maintenant la troisième électrode qu'on appelle la grille à une source (e) de force électromotrice alternative dont l'autre pôle est rattaché au pôle négatif des accumulateurs de chauffage, qui sert ainsi de retour commun et dont le potentiel peut être pris pour le zéro des potentiels.

Cette grille sert véritablement d'organe de distribution; quand elle est à un potentiel positif, les électrons passent jusqu'à la plaque; quand elle est à un potentiel négatif, elle repousse les électrons. D'une façon plus précise, le courant de plaque (c'est-à-dire plaque-filament) est la somme d'une intensité constante j_0 et d'une intensité variable j; de même, la différence de potentiel entre la plaque et le filament est la somme d'une différence de potentiel constante V_0 et d'une différence de potentiel alternative v. Et dans ces conditions, si j'appelle ρ la résistance entre la plaque et le filament et K le facteur d'amplification en volts, on a

$$\rho j = v + \mathrm{K}e. \tag{44}$$

Il est facile de trouver l'intensité du courant alternatif i_1, qui circule dans le solénoïde du circuit oscillant et s'y superpose au courant j_0.

Je compte i_1 positivement dans le même sens que j_0 et j'appelle C_2 l'armature du condensateur C reliée à la plaque à travers la pile de

Digitized by Google

plaque, C_1 étant l'armature reliée au retour commun; soit alors i_2 le courant de charge de l'armature C_2.

On aura

$$j = i_1 - i_2, \qquad i_2 = C\frac{dv}{dt}, \tag{45}$$

puis

$$v = -Ri_1 - L\frac{di_1}{dt} \tag{46}$$

et enfin, supposons la force électromotrice e harmonique simple,

$$e = e_0 \sin \omega_0 t. \tag{47}$$

L'élimination de j, v et i_2 donne l'équation en i_1 :

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + \left(R + \frac{L}{C\rho}\right)\frac{di_1}{dt} + \left(1 + \frac{R}{\rho}\right)\frac{i_1}{C} = \frac{K e_0}{C\rho}\sin \omega_0 t; \tag{48}$$

d'où, en régime permanent,

$$i_1 = \frac{K e_0}{CL\rho}\,\frac{1}{A}\sin(\omega_0 t - \varphi) \tag{49}$$

avec

$$\begin{cases} A\cos\varphi = -\omega_0^2 + \dfrac{1}{CL}\left(1 + \dfrac{R}{\rho}\right), \\ A\sin\varphi = \left(\dfrac{R}{L} + \dfrac{1}{C\rho}\right)\omega_0, \end{cases} \tag{50}$$

d'où A et φ.

Je me dispense d'expliciter ces valeurs.

Modifications de l'exposant d'amortissement et de la pseudo-période.

On peut remarquer en passant que la présence de la lampe à trois électrodes a pour effet de modifier légèrement l'exposant d'amortissement β et la pseudo-période ω du courant oscillant du solénoïde.

Quand le circuit oscillant est laissé à lui-même, on a

$$\beta = \frac{R}{2L} \qquad \text{et} \qquad \omega^2 + \beta^2 = \frac{1}{CL}. \tag{51}$$

Avec la lampe à trois électrodes, on a, la grille étant isolée,

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + 2\beta_1\frac{di_1}{dt} + (\beta_1^2 + \omega_1^2) i_1 = 0 \tag{52}$$

Digitized by Google

avec

$$\beta_1 = \frac{R}{2L}\left(1 + \frac{L}{CR}\frac{1}{\rho}\right), \qquad \beta_1^2 + \omega_1^2 = \frac{1}{CL}\left(1 + R\frac{1}{\rho}\right). \tag{53}$$

Si l'on peut négliger le carré de $\frac{1}{\rho}$, il vient

$$\omega_1 = \omega\left(1 + \frac{R}{4CL\omega^2}\frac{1}{\rho}\right). \tag{54}$$

Cas particulier.

Revenons à l'expression du courant i_1 oscillatoire dû à la force électromotrice $e_0 \sin\omega_0 t$.

Faisons croître ω_0 à partir de zéro. Il arrivera un moment où l'on aura

$$= \frac{1}{CL}\left(1 + \frac{R}{\rho}\right). \tag{55}$$

A ce moment, on aura $\cos\varphi_1 = 0$. Prenons $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$.

Comme nous prenons ω_0 positif, A et φ_1 seront de même signe d'après (50), donc A est positif et il vient

$$i_1 = -\frac{K e_0 \cos\omega_0 t}{CL\rho\left(\frac{R}{L} + \frac{1}{C\rho}\right)\omega}. \tag{56}$$

Le courant i_1 est en quadrature avec la force électromotrice (e).

Auto-entretien.

Ceci suggère la possibilité de remplacer l'alternateur qui produit cette force électromotrice (e) par une bobine d'entretien, où le courant i_1 engendrerait par induction un courant alternatif.

Soit donc $(\mathfrak{E})$ cette bobine d'entretien. Quand un courant égal à l'unité passe dans le solénoïde du circuit oscillant, il envoie dans cette bobine d'entretien un flux d'induction magnétique égal à $+M$, en appelant M le coefficient d'induction mutuelle. Je mets le signe $+$, parce que le courant unité est supposé de sens positif.

Alors la force électromotrice induite sera

$$-M\frac{di_1}{dt}. \tag{57}$$

Digitized by Google

Si l'on égale cette force électromotrice à e, on a

$$\frac{KM}{CL\rho\left(\frac{R}{L}+\frac{1}{C\rho}\right)}\omega_0 e\sin\omega_0 t = e_0\sin\omega t, \tag{58}$$

et il reste

$$-M=\frac{1}{K}(L+C\rho R). \tag{59}$$

Grâce à cette valeur de M, la bobine d'entretien remplacera complètement l'alternateur (e).

Régime éolien.

La quantité e_0 n'intervient pas; de même, l'origine des temps est arbitraire.

On pourra, pour i_1, choisir à volonté les conditions initiales $(i_1)_0$ et $\left(\frac{di_1}{dt}\right)_0$. Celles-ci dépendent donc de circonstances fortuites. Rien ne paraît déterminer l'amplitude maximum de i_1 et, en effet, la seule source d'énergie est la pile de plaque; or son voltage n'apparaît pas.

On constate bien un régime périodique permanent, mais il ne se présente pas comme un état de régime stable, vers lequel le système ait tendance à revenir quand on l'en a écarté. Si l'on trouble le mouvement, il en résulte un nouveau régime périodique.

L'équation différentielle relative à i_1 est, dans le cas d'une bobine d'entretien, facilement obtenue en remplaçant $e_0\sin\omega_0 t$ par $-M\frac{di_1}{dt}$ et l'on a ainsi

$$L\frac{d^2 i_1}{dt^2}+\left(R+\frac{L}{C\rho}+M\frac{k}{C\rho}\right)\frac{di_1}{dt}+\left(1+\frac{R}{\rho}\right)\frac{i_1}{C}=0, \tag{60}$$

et elle représente un mouvement amorti; mais pour la valeur de M choisie, elle se réduit à

$$L\frac{d^2 i_1}{dt^2}+\left(1+\frac{R}{\rho}\right)\frac{i_1}{C}=0. \tag{61}$$

Si $|M|$ a une valeur un peu plus petite, l'exposant d'amortissement β, au lieu d'être nul, est positif et le mouvement (j'appelle

Digitized by Google

ainsi la variation de i_1 en fonction du temps) est un mouvement périodique amorti.

Si, au contraire, $|M|$ a une valeur plus grande, l'exposant d'amortissement change de signe et le mouvement périodique a un amortissement négatif, c'est-à-dire que i_1 passe périodiquement par des valeurs de plus en plus grandes augmentant indéfiniment.

Enfin, il pourrait arriver que $|M|$ eût une valeur si grande que le mouvement devînt apériodique. Il n'y aurait plus d'oscillations du tout.

On voit que l'hypothèse de K et ρ constants est incompatible avec l'existence d'un régime périodique stable.

Énergie consommée dans la lampe.

Examinons l'énergie fournie au circuit oscillant dans le cas du régime harmonique pur.

Comme les conditions initiales qui déterminent l'amplitude du courant i_1 sont arbitraires et que la force électromotrice de la pile de plaque n'intervient pas dans les équations du régime oscillatoire, il faut qu'il y ait une compensation entre la chaleur dégagée dans la résistance R du circuit oscillant et l'énergie consommée dans la lampe. La somme de ces deux quantités d'énergie doit demeurer constante; c'est ce qu'il est facile de constater.

Et, en effet, la puissance W dépensée dans la lampe est

$$W = \frac{1}{T}\int_0^T (V_0 + v)(j_0 + j)\,dt. \tag{62}$$

Mais cette expression se simplifie parce que les valeurs moyennes de v et de j sont nulles; il reste donc

$$W = V_0 j_0 + \frac{1}{T}\int_0^T vj\,dt. \tag{63}$$

Or le courant de plaque j est la différence du courant i_1 du solénoïde et du courant de charge i_2 du condensateur; ce dernier est en quadrature avec la différence de potentiel v des armatures du condensateur, il n'y a donc pas à en tenir compte. Il reste donc à évaluer

Digitized by Google

l'intégrale $\int_0^T v i_1 \, dt$, mais on a

$$\frac{1}{T}\int_0^T (-v) i_1 \, dt = R(i_1)^2_{\text{eff}}. \tag{64}$$

Car le premier membre représente l'énergie dépensée sous forme de chaleur dans le solénoïde du circuit oscillant, puisqu'il est parcouru par le courant i_1 sous la différence de potentiel $(-v)$. On a donc

$$W = V_0 j_0 - R(i_1)^2_{\text{eff}}$$

ou bien

$$W + R(i_1)^2_{\text{eff}} = V_0 j_0. \tag{65}$$

C'est-à-dire que la somme de l'énergie consommée dans la lampe et de la chaleur dégagée dans le circuit oscillant est bien une somme constante.

Sens à donner à la force électromotrice d'entretien.

Remarque au sujet du signe de M. — Le courant i_1 est périodique; considérons l'instant où il passe par la valeur zéro, soit alors $\left(\frac{di_1}{dt}\right)_0$ sa vitesse d'accroissement. Au bout d'une pseudo-période, en admettant qu'aucune force d'entretien n'ait agi, il revient avec une vitesse $\left(\frac{di}{dt}\right)_1$, légèrement diminuée, a la valeur zéro. Pour que l'entretien se produise, il faut que la force électromotrice, qui agira alors sur lui, lui communique une vitesse qui s'ajoute à la vitesse réduite $\left(\frac{di}{dt}\right)_1$ pour lui redonner la valeur initiale $\left(\frac{di_1}{dt}\right)_0$; on pourrait concevoir que cet entretien s'obtînt en faisant agir alors pendant un court espace de temps la force électromotrice de la bobine d'entretien. Or celle-ci est égale à

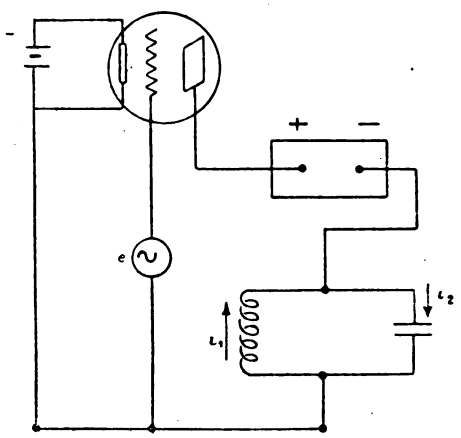
$$-M\left(\frac{di_1}{dt}\right)_1.$$

Il faut donc qu'elle soit de même sens que $\left(\frac{di_1}{dt}\right)$ et, par suite, que $-M$ soit positif.

Digitized by Google

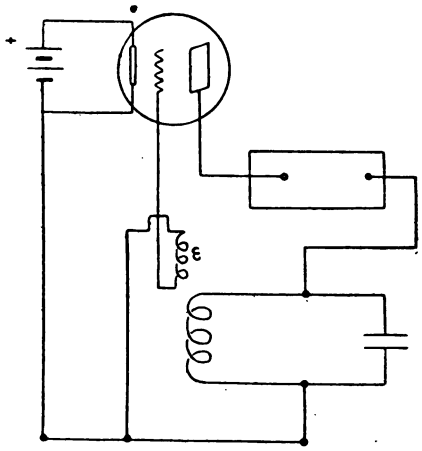
Cela signifie qu'un courant ayant dans une des deux bobines le sens choisi comme positif, le flux d'induction magnétique qu'il pro-

Fig. 13.



duit à travers la seconde est en sens inverse de celui qu'y engendrerait un courant positif circulant dans cette bobine.

Fig. 14.



Si i_1 est de la forme $\sin\omega t$, sa vitesse $\frac{di_1}{dt}$ est égale à

$$\omega \cos \omega t = \omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Digitized by Google

Or pour que l'on ait

$$\omega t_1 + \frac{\pi}{2} = \omega t \qquad \text{ou} \qquad \frac{t_1}{T} + \frac{1}{4} = \frac{t}{T},$$

il faut qu'on ait $t_1 = t - \frac{T}{4}$, de sorte que le facteur périodique de $\frac{di_1}{dt}$ passe par les valeurs du facteur périodique de i_1 un quart de période à l'avance.

Nous dirons donc que la force électromotrice d'entretien doit être en avance sur le courant à entretenir, afin d'être en phase avec sa vitesse au moins pendant la plus grande partie du mouvement.

Étude algébrique de l'équation caractéristique.

On donne une équation du troisième degré

$$f(z) \equiv az^3 + bz^2 + cz + d = 0 \tag{66}$$

et l'on demande quelles sont les conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients pour que les trois racines de cette équation soient négatives ou que tout au moins la partie réelle de ces racines soit négative, dans le cas où la racine considérée, au lieu d'être réelle, serait imaginaire. On peut s'exprimer autrement dans la représentation géométrique des imaginaires, Ox étant l'axe des quantités réelles et Oy celui des quantités imaginaires, une racine aura sa partie réelle négative, si son affixe tombe dans la partie du plan qui est située par rapport à Oy du côté des x négatifs.

La solution de ce problème résulte de l'application du théorème des résidus de Cauchy. On sait que le nombre des racines de $f(z)$ comprises dans une aire limitée par un contour (c) est égal à l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f'(z)}{f(z)} dz \tag{67}$$

prise le long du contour c dans le sens positif, z étant l'affixe de la variable $x + y\sqrt{-1}$. Pour contour, choisissons une ligne formée de la portion AB de l'axe des y depuis $y_A = -R$ jusqu'à $y_B = +R$, puis d'une demi-circonférence (γ) décrite de l'origine comme centre avec le rayon R et située tout entière dans le demi-plan des x négatifs.

Digitized by Google

Ensuite, faisons croître R indéfiniment, toutes les racines devront se trouver à l'intérieur du contour, qui vient d'être défini.

L'intégrale le long de la demi-circonférence (γ_1) s'obtient facilement en développant $\frac{f'(z)}{f(z)}$ en série suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{z}$ et l'on a ainsi, si n est le degré de $f(z)$,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z} + \sum_p \frac{A_p}{z^p}, \tag{68}$$

d'où

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n \int_{(\gamma_1)} \frac{dz}{z} + \Sigma \left| A_p \frac{z^{-p+1}}{-p+1} \right|_B^A. \tag{69}$$

Or on a

$$\frac{dz}{z} = \sqrt{-1}\, d\varphi, \tag{70}$$

si l'on appelle φ l'argument de z, d'où

$$\int_{(\gamma_1)} \frac{dz}{z} = \sqrt{-1}\,\pi. \tag{71}$$

D'autre part, on a

$$(z^{-p+1})' = (-p+1)z^{-p}, \qquad z_A = R\, e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}, \qquad z_B = R\, e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}, \tag{72}$$

$$\begin{aligned} \int_{(\gamma_1)} \frac{dz}{z^p} &= -\frac{2\sqrt{-1}}{-p+1} \frac{e^{-p+1)\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} - e^{-(-p+1)\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \frac{1}{R^{p-1}} \\ &= -\frac{2\sqrt{-1}}{(-p+1)R^{p-1}} \sin(-p+1)\frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{73}$$

Donc, quand R tend vers l'infini, le coefficient de z_1 tend vers zéro, puisque p est plus grand que l'unité.

On a donc, pour résultat de cette première partie du calcul,

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{(\gamma_1)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{n}{2}. \tag{74}$$

Calculons maintenant l'intégrale le long de la droite AB; on a

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_A^B \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left| \log \operatorname{mod} f(z) + \sqrt{-1} \arg f(z) \right|_A^B. \tag{75}$$

Occupons-nous du premier terme, celui qui correspond au module;

Digitized by Google

on a

$$z_A = -R\sqrt{-1}, \qquad z_B = R\sqrt{-1} \tag{76}$$

et, par suite, z_A et z_B sont conjugués, d'où

$$f(z_A)\,f(z_B) = [\operatorname{mod} f(z_A)]^2 = [\operatorname{mod} f(z_B)]^2, \tag{77}$$

donc le terme correspondant au logarithme disparaît.

Examinons le second terme qui correspond à l'argument et bornons-nous, maintenant, pour plus de simplicité, au cas où la fonction $f(z)$ se réduit au troisième degré.

Pour que les trois racines soient dans le demi-cercle (γ), il faut que, lorsque A augmente indéfiniment, on ait

$$3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2\pi}\lim_{R=\infty} \left|\arg f(z)\right|_A^B \tag{78}$$

et il s'agit de suivre, *d'une façon continue*, l'accroissement de l'argument Ψ de $f(z)$, quand on va de A à B. Il faut que la limite cherchée soit 3π. Or, on a

$$f(y\sqrt{-1}) = d - by^2 + (cy - ay^3)\sqrt{-1}, \tag{79}$$

d'où

$$\operatorname{tang}\Psi = \frac{cy - ay^3}{d - by^2}. \tag{80}$$

Pour $y = -R = -\infty$, on aura $\Psi = -\frac{\pi}{2}$, si l'on a $\frac{a}{b} > 0$. Admettons que $\frac{d}{b}$ soit positif et que l'on ait $\frac{c}{a} > \frac{d}{b} > 0$, alors y croissant, $\operatorname{tang}\Psi$ s'annulera pour $y = -\sqrt{\frac{c}{a}}$, puis deviendra infini positif pour $y = -\sqrt{\frac{d}{b}}$; on aura alors $\Psi = \frac{\pi}{2}$ et Ψ se sera ainsi accru de π; $\operatorname{tang}\Psi$ devient aussitôt après négatif, passe par zéro pour $y = 0$ et devient infini positif pour $y = +\sqrt{\frac{d}{b}}$, l'angle Ψ partant de $\frac{\pi}{2}$ s'est accru jusqu'à $\frac{3\pi}{2}$, ce qui fait une nouvelle augmentation de π; immédiatement après, $\operatorname{tang}\Psi$ devient infiniment grand, mais négativement, et il s'annule pour $y = \sqrt{\frac{c}{a}}$, puis redevient infini positif pour

Digitized by Google

$y = +\infty$, l'angle Ψ, partant de $3\frac{\pi}{2}$, arrive ainsi à $5\frac{\pi}{2}$, subissant une nouvelle augmentation de π. Donc l'argument de $f(y\sqrt{-1})$ subit bien ainsi au total une augmentation de 3π quand on décrit l'axe des y de A à B, $\overline{OA}$ étant infiniment grand.

Les conditions que nous avons admises sont

$$\frac{a}{b} > 0, \qquad \frac{c}{a} > \frac{d}{b} > 0. \tag{81}$$

Ce sont des conditions suffisantes pour que les racines aient leur partie réelle négative.

Ces conditions sont d'ailleurs nécessaires, car il est clair que l'argument Ψ ne peut subir une augmentation égale à π sans que $\operatorname{tang}\Psi$ devienne infini; il faut donc que $\operatorname{tang}\Psi$ devienne trois fois infini et que le changement de signe se fasse dans chaque cas en passant par l'infini du $+$ au $-$, qui correspond aux angles croissants. Il faut donc, si l'on part d'une valeur très grande, qu'elle commence par être négative, d'où $\frac{a}{b} > 0$; il faut aussi que la condition $\frac{d}{b} > 0$ soit satisfaite pour que $\operatorname{tang}\Psi$ devienne infini deux autres fois, enfin pour que le passage se fasse du $+$ au $-$, il faut, en vertu de l'égalité

$$\operatorname{tang}\Psi = \frac{a}{b}y + \frac{bc - ad}{b}\,\frac{y}{d - by^2}, \tag{82}$$

que $bc - ad$ soit positif. Les conditions indiquées sont donc à la fois nécessaires et suffisantes.

Audion générateur d'oscillation.

Reprenons le problème de la génération des oscillations dans un circuit oscillant relié à une lampe à trois électrodes. Supposons cette fois pour donner un peu plus de généralité que la résistance et l'induction électromagnétiques soient réparties entre les branches (i_1) et la branche du condensateur (i_2). Soient R_1 la résistance et L_1 le coefficient de self-induction dans la branche (i_1), soient R_2 la résistance et L_2 le coefficient de self-induction dans la branche (i_2).

Faisons agir un alternateur de force électromotrice e

$$e = e_0 \sin\omega t \tag{83}$$

sur la grille.

Digitized by Google

Nous aurons des équations analogues à celles que nous avons déjà obtenues; savoir, en conservant les mêmes notations,

$$\rho(i_1 - i_2) = -\left(R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt}\right) + ke, \tag{84}$$

$$-\left(R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt}\right) = \left(R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt}\right) + V_2 - V_1. \tag{85}$$

V_2 et V_1 étant les potentiels de l'armature (C_2) du condensateur (côté plaque) et de l'armature (C_1) (côté filament),

$$i_2 = C \frac{d(V_2 - V_1)}{dt}. \tag{86}$$

Posons $\frac{d}{dt} = p$, et traitons cette quantité symbolique, qui est un opérateur comme une quantité algébrique, ce qui est permis et simplifie l'écriture :

$$(L_1 p + R_1 + \rho) i_1 - \rho i_2 = ke, \tag{87}$$

$$(L_1 p^2 + R_1 p) i_1 + \left(L_2 p^2 + R_2 p + \frac{1}{C}\right) i_2 = 0. \tag{88}$$

Éliminons i_2, il vient

$$\left[\left(L_2 p^2 + R_2 p + \frac{1}{C}\right)(L_1 p + R_1 + \rho) + \rho(L_1 p^2 + R_1 p)\right] i_1 = k\left(L_2 p^2 + R_2 p + \frac{1}{C}\right) e. \tag{89}$$

Cette équation est de la forme

$$a_0 \frac{d^3 i}{dt^3} + a_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + a_2 \frac{di_1}{dt} + a_3 i_1 = E, \tag{90}$$

avec

$$\begin{cases} a_0 = L_1 L_2, \\ a_1 = (\rho + R_1) L_2 + L_1 R_2 + L_1 \rho, \\ a_2 = (\rho + R_1) R_2 + \frac{1}{C} L_1 + R_1 \rho, \\ a_3 = \frac{1}{C}(R_1 + \rho). \end{cases} \tag{91}$$

Posons :

$$A \cos\varphi = -L_2 \omega_0^2 + \frac{1}{C}, \tag{92}$$

$$A \sin\varphi = R_2 \omega_0. \tag{93}$$

Digitized by Google

Il vient

$$E = ke_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi). \tag{94}$$

On en déduit

$$i_1 = M_1 \sin(\omega_0 t + \varphi - \Psi) \tag{95}$$

à la condition de déterminer M_1 et Ψ par la condition que cette valeur de i_1 satisfasse à l'équation (8).

On a ainsi, par substitution,

$$M_1[(-a_0\omega_0^3 + a_2\omega_0)\cos(\omega_0 t + \varphi - \Psi) + (-a_1\omega_0^2 + a_3)\sin(\omega_0 t + \varphi - \Psi)] = ke_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Je poserai donc, pour déterminer M_1 et Ψ,

$$M_1(-a_1\omega_0^2 + a_3) = ke_0 A \cos\Psi, \tag{96}$$

$$M_1(-a_0\omega_0^3 + a_2\omega_0) = ke_0 A \sin\Psi. \tag{97}$$

Le courant i_1 et la force électromotrice e seront en quadrature, si l'on a

$$\varphi - \Psi = -\frac{\pi}{2}, \tag{98}$$

d'où

$$i_1 = -M_1 \cos\omega_0 t. \tag{99}$$

Ceci suggère la possibilité d'obtenir la force électromotrice par l'induction du courant i_1 sur une bobine d'entretien, pourvu que cette action s'exerce dans un sens convenable.

On devra avoir en appelant M le coefficient d'induction mutuelle des deux enroulements

$$-M\frac{di_1}{dt} = e \tag{100}$$

ou

$$-MM_1\omega_0 \sin\omega_0 t = e_0 \sin\omega_0 t, \tag{101}$$

d'où

$$M = -\frac{1}{M_1\omega_0}, \tag{102}$$

ce qui détermine M, à la condition que ω_0 soit égal à la valeur résultant de la condition (98), savoir :

$$\cos\varphi\cos\Psi + \sin\varphi\sin\Psi = 0 \tag{103}$$

Digitized by Google

ou

$$(104)\qquad (-a_1\omega_0^2+a_3)\left(-L_2\omega_0^2+\frac{1}{C}\right)+R_2\omega_0^2(-a_0\omega_0^2+a_2)=0.$$

L'entretien sera possible si les racines $\pm\omega'$ et $\pm\omega''$ de cette équation bicarrée en ω_0 sont réelles. C'est ce qui aura lieu si R_2 est très petit ou très grand.

Mais il y aura des valeurs de R_2 pour lesquelles il n'y aura pas de valeur correspondante de ω_0.

Pour nous en rendre compte, écrivons

$$(105)\qquad y=\frac{a_0}{a_1L_2C}R_2=\frac{\left(\omega_0^2-\frac{a_3}{a_1}\right)\left(\omega_0^2-\frac{1}{L_2C}\right)}{\omega_0^2\left(\omega_0^2-\frac{a_2}{a_0}\right)},$$

y est une fonction rationnelle du second degré en ω_0^2. Je dis qu'elle a un maximum et un minimum. En effet, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il n'y ait pas de maximum et de minimum est que les racines du numérateur et du dénominateur soient réelles et alternées. Or ici elles sont réelles mais non alternées :

Les racines du numérateur étant positives, il suffit de montrer qu'en substituant $\frac{a_2}{a_0}$ à la place de ω_0^2 dans le numérateur, on obtient un résultat positif. Ce résultat a effectivement le signe de

$$(a_2a_1-a_0a_3)(a_2L_2C-a_0);$$

or, ces deux facteurs sont essentiellement positifs, l'un et l'autre, car on a

$$(106)\qquad a_2a_1-a_0a_3=\left[\underline{(\rho+R_1)L_2}+L_1R_2+L_1\rho\right]\times\left[(\rho+R_1)R_2+\underline{\frac{1}{C}L_1}+R_1\rho\right]-\underline{\frac{L_1L_2}{C}(R_1+\rho)}>0,$$

$$(107)\qquad a_2L_2C-a_0=\left[(\rho+R_1)R_2+\underline{\frac{1}{C}L_1}+R_2\rho\right]\underline{L_2C}-\underline{L_1L_2}>0.$$

Pour les valeurs de R_2 comprises entre le maximum et le minimum, il n'y a donc pas d'entretien possible.

Remarquons maintenant qu'il résulte du calcul précédent que la racine critique $\frac{a_2}{a_0}$ est supérieure aux racines $\frac{a_3}{a_1}$ et $\frac{1}{CL_2}$.

Examinons maintenant ce que devient l'équation différentielle du

Digitized by Google

courant i_1 si la force électromotrice de l'alternateur est remplacée par l'action de la bobine d'entretien, en nous plaçant dans le cas où R_2 a une valeur compatible avec l'entretien.

L'équation différentielle devient

$$A_0 \frac{d^3 i_1}{dt^3} + A_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + A_2 \frac{di_1}{dt} + A_3 = 0, \tag{108}$$

en posant :

$$A_0 = L_2(L_1 + KM),$$
$$A_1 = (R_1 + \rho)L_2 + R_2(L_1 + KM) + L_1\rho,$$
$$A_2 = (\rho + R_1)R_2 + (L_1 + KM)\frac{I}{C} + R_1\rho,$$
$$A_3 = \frac{I}{C}(R_1 + \rho).$$

L'équation caractéristique est alors donnée par

$$A_0 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0. \tag{109}$$

La discussion du signe des parties réelles de cette équation a été faite dans un paragraphe précédent.

Faisons seulement ici quelques remarques :

1° Quelle est la condition pour qu'il puisse y avoir un régime périodique non amorti?

Je pose

$$i_1 = I_1 \sin \omega t \tag{110}$$

et je porte dans l'équation (108), il vient

$$I_1[(-A_0\omega^3 + A_2\omega)\cos\omega t + (-A_1\omega^2 + A_3)\sin\omega t] = 0. \tag{111}$$

Cette équation devant avoir lieu quel que soit t, on a

$$-A_0\omega^3 + A_2\omega = 0, \qquad -A_1\omega^2 + A_3 = 0, \tag{112}$$

ce qui exige

$$A_0 A_3 - A_1 A_2 = 0 \tag{113}$$

ou bien, d'après les valeurs ci-dessus,

$$L_2(L_1 + KM)\frac{I}{C}(R_1 + \rho) - [(R_1 + \rho)L_2 + (L_1 + KM)R_2 + L_1\rho] \times \left[(R_1 + \rho)R_2 + (L_1 + KM)\frac{I}{C} + R_1\rho\right] = 0, \tag{114}$$

Digitized by Google

équation du second degré en KM, dont j'appellerai les racines KM′ et KM″. Elles correspondront aux racines ω'_0 et ω''_0 de l'équation (22).

2° Si, dans le premier membre de cette équation, on fait

$$M = 0, \tag{115}$$

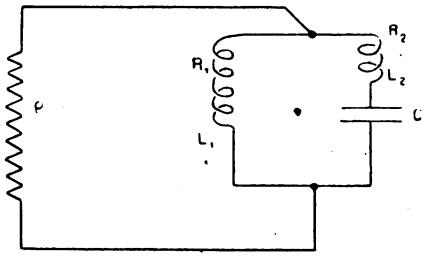
ce premier membre se réduit à

$$a_0 a_3 - a_1 a_2 < 0. \tag{116}$$

Dans ce cas, la lampe se comporte comme une résistance ρ et la grille n'entretient pas d'oscillation.

L'équation différentielle de i_1 est celle qu'on obtiendrait dans le cas de la figure ci-après.

Fig. 15.



Il est clair qu'aucune énergie n'intervenant pour compenser les pertes dans les résistances, les exposants d'amortissement seront négatifs, et le système tendra vers le repos.

3° Si, dans le premier membre de l'équation (114) en KM, nous substituons $-L_1$, nous obtenons évidemment un résultat négatif ; or $KM = -\infty$ et, d'après (116), $KM = 0$ donnent le signe — comme résultat de substitution. Donc $-L_1$ est extérieur aux racines KM′ et KM″.

4° Pour qu'un exposant d'amortissement change de signe, il faut qu'une racine de l'équation caractéristique, si elle est réelle, passe par zéro ou par l'infini et, si elle est imaginaire, qu'elle passe par une des valeurs $\pm \omega'_0 \sqrt{-1}$ ou $\pm \omega''_0 \sqrt{-1}$.

Comme A_3 est différent de zéro, il ne peut pas y avoir de racine nulle. Le passage par l'infini se fait quand KM passe par la valeur $-L_1$.

Digitized by Google

Le produit des trois racines x_1, x_2, x_3 est

$$x_1 x_2 x_3 = -\frac{A_3}{L_2(L_1+KM)} \qquad A_3 > 0. \tag{117}$$

Si je remplace KM par KM′ ou par KM″, x_1 et x_2 sont imaginaires conjugués et l'on a

$$x_2 x_3 = (\omega'_0)^2 \quad \text{ou} \quad (\omega''_0)^2. \tag{118}$$

Donc x_1, la racine réelle, est de signe contraire à L_1+KM' et L_1+KM'', qui sont de même signe.

Je prends pour variable à la place de M

$$y = L_1 + KM,$$

l'équation (114) en M devient

$$\frac{L_2}{C}(R_1+\rho)y - [(R_1+\rho)L_2 + L_1\rho + R_2 y] \times \left[(R_1+\rho)R_2 + R_1\rho + \frac{1}{C}y\right] = 0 \tag{119}$$

ou

$$\frac{R_2}{C}y^2 + y\left[-\frac{L_2}{C}(R_1+\rho) + R_2[(R_1+\rho)R_2 + R_1\rho] + \frac{1}{C}(R_1+\rho)L_2 + L_1\rho\right] + \ldots = 0 \tag{120}$$

et l'on voit que la somme des racines est

$$y'+y'' = -\frac{C}{R_2}\left(R_2[R_1\rho + R_2(R_1+\rho)] + \frac{L_1\rho}{C}\right) < 0. \tag{121}$$

Donc L_1+KM' et L_1+KM'' sont l'un et l'autre négatifs.

Donc x_1, la racine réelle, est positive.

Discussion. — Quand on fait décroître M de zéro à $-\infty$, tout d'abord x_1, x_2, x_3 sont toutes trois négatives ou à partie réelle négative, puis quand KM passe par $-L_1$, une racine, x_1 par exemple, qui est réelle, passe de $-\infty$ à $+\infty$. Elle devient positive et restera toujours positive. Puis quand KM passe par la plus grande des deux valeurs KM′ et KM″, les deux racines x_2 et x_3 deviennent à partie réelle positive et conservent ce caractère quand KM reste entre KM′ et

Digitized by Google

KM″. Enfin quand KM devient inférieur à cet intervalle, x_2 et x_3 redeviennent à partie réelle négative.

Conséquence. — Quand KM sera situé dans l'intervalle critique de KM′ à KM″, il y aura un mouvement oscillatoire à amortissement négatif, c'est-à-dire d'amplitude croissante.

Cette amplitude croîtra tant que l'amplitude du courant ne sortira pas de la région pour laquelle l'équation caractéristique de la lampe

(122) $$\rho j = v + \mathrm{K}e$$

est valable.

Mais lorsque cette amplitude sera devenue assez grande, il faudra tenir compte de la courbure des caractéristiques et remplacer l'équation (122) par une formule différente.

Discussion de l'équation qui détermine les pulsations.

L'équation (104) qui détermine ω_0^2 est une équation du second degré qu'il est facile de discuter, si l'on prend pour paramètre variable la quantité y,

$$y = \frac{a_0}{a_1}\frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{L}_2},$$

qui est de dimension nulle. Posons

$$x = \omega_0^2.$$

L'équation (104) peut s'écrire sous la forme

$$(x-\alpha)(x-\beta) - yx(x-\gamma) \equiv x^2(1-y) - (\alpha+\beta-\gamma y)x + \alpha\beta = 0.$$

Dans cette expression, α, β, γ sont des quantités positives et nous avons vu que γ était supérieur à α et à β, de sorte que si l'on pose

$$y_0 = \frac{\alpha+\beta}{\gamma},$$

on a

$$0 < y_0 < 1.$$

Cela posé : 1° Si l'on a

$$y > 1,$$

l'équation en x a deux racines réelles de signes contraires. La positive

Digitized by Google

seule convient et elle donnera une valeur convenable pour ω_0^2. En ce cas, la valeur de R_2 sera notable.

2° Si l'on a

$$\gamma < 1,$$

il convient d'examiner le signe du discriminant Δ,

$$\Delta = (\alpha + \beta - \gamma y)^2 - 4(1-y)\alpha\beta \equiv \gamma^2 y^2 - 2[(\alpha+\beta)\gamma - 2\alpha\beta)y + (\alpha-\beta)^2$$

ou encore

$$\Delta = \gamma^2(y - y_0)^2 - 4\alpha\beta(1-y).$$

Faisons dans Δ les substitutions 0, y_0, 1, nous obtenons les signes ci-après :

y,	0,	y_0,	1,
Δ,	+,	−,	+.

Il y a donc deux racines y' et y'' qu'on peut ranger dans l'ordre suivant :

$$0 < y' < y_0 < y'' < 1.$$

y doit être compris entre 0 et y' ou entre y'' et 1, il y a alors deux racines x_1 et x_2 de même signe, mais on a

$$x_1 + x_2 = \frac{\gamma}{1-y}(y_0 - y).$$

Pour que x_1 et x_2 conviennent, il faut que y soit inférieur à y_0, on doit donc avoir

$$0 < y < y'.$$

Alors R_2 sera voisin de zéro et l'on aura

$$\omega_0' = \sqrt{x_1}, \qquad \omega_0'' = \sqrt{x_2}$$

pour les deux pulsations cherchées.

Détermination de l'amplitude.

Je vais maintenant chercher à déterminer l'amplitude du terme fondamental de l'oscillation du courant i_1, en supposant que l'expérience donne entre la partie oscillatoire j du courant plaque-filament et les potentiels alternatifs v et u de plaque et de grille une

Digitized by Google

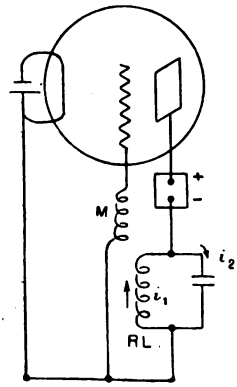
relation de la forme

$$j = \alpha(u + K\nu) + \beta(u + K\nu)^3 \tag{123}$$

qui paraît être la relation approchée quand u et ν sont petits; si j_0 est à peu près la moitié du courant de saturation. α et β sont deux constantes caractéristiques de la lampe.

Grâce à cette loi expérimentale, le problème est défini.

Fig. 16.



Plaçons-nous dans le cas très simple où les armatures du condensateur C du circuit oscillant sont reliées directement d'une part à travers la pile de plaque à la plaque elle-même et d'autre part au filament, tandis que la bobine de solénoïde forme la branche (RL) parcourue par le courant i_1, laquelle agit à son tour par induction sur la bobine d'entretien (M).

En mettant p pour $\frac{d}{dt}$, afin de simplifier l'écriture, nous avons les équations, déjà obtenues précédemment,

$$u = -Mpi_1, \tag{124}$$

$$\nu = -(R + Lp)i_1. \tag{125}$$

Si i_2 est le courant de charge du condensateur, on a

$$Cp\nu = i_2. \tag{126}$$

Enfin, on a

$$i = i_1 - i_2. \tag{127}$$

Digitized by Google

De là, on tire

$$j = C\left(\frac{1}{C} + Rp + Lp^2\right) i_1, \tag{128}$$

$$u + Kv = -[R + (L + KM)p]\, i_1. \tag{129}$$

Cela posé, j'admets l'équation (123), comme la relation expérimentale décrivant les phénomènes à l'intérieur de la lampe. Je compte les temps à partir du moment où i_1 s'annule et je cherche la solution périodique. L'expression de i_1 est une série de Fourier de pulsation ω_i; cette pulsation est à déterminer et le terme fondamental de i_1 est

$$i_1 = A \sin \omega t. \tag{130}$$

A est aussi à déterminer. A et ω sont nos inconnues.

Or, l'équation (128) donne

$$j = AC\left\{\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)\sin \omega t + R\omega \cos \omega t\right\}; \tag{131}$$

de même, l'équation (129) donne

$$u + Kv = -A\left\{R \sin \omega t + (L + KM)\omega \cos \omega t\right\}. \tag{132}$$

J'écrirai donc

$$u + Kv = a \sin \omega t + b \cos \omega t \tag{133}$$

avec

$$a = -AR, \qquad b = -A(L + KM)\omega \tag{134}$$

et j'aurai

$$\begin{aligned}(u + Kv)^3 = {} & a^3 \sin^3 \omega t + b^3 \cos^3 \omega t \\ & + 3a^2 b \sin^2 \omega t \cos \omega t + 3ab^2 \sin \omega t \cos^2 \omega t.\end{aligned} \tag{135}$$

Transformons les puissances des sinus et cosinus par les formules

$$\left\{\begin{aligned} 4\sin^3 \omega t &= 3\sin \omega t + \sin 3\omega t, \\ 4\cos^3 \omega t &= 3\cos \omega t + \cos 3\omega t, \\ 4\sin^2 \omega t \cos \omega t &= \cos \omega t + \cos 3\omega t, \\ 4\sin \omega t \cos^2 \omega t &= \sin \omega t + \sin 3\omega t. \end{aligned}\right. \tag{136}$$

Digitized by Google

Ne conservons que les termes en $\sin\omega t$ et $\cos\omega t$, il viendra

$$(137)\qquad (u+\mathrm{K}v)^3=\frac{3}{4}(a^2+b^2)(as+bc)\qquad \begin{cases}(s\equiv\sin\omega t),\\(c\equiv\cos\omega t).\end{cases}$$

Et il vient

$$(138)\qquad j=(as+bc)\left[\alpha+\frac{3}{4}\beta(a^2+b^2)\right]\qquad \begin{cases}(s=\sin\omega t),\\(c=\cos\omega t).\end{cases}$$

Or, l'équation (131) peut s'écrire sous la forme

$$(139)\qquad j=m\sin\omega t+n\cos\omega t.$$

En identifiant, il vient donc

$$(140)\qquad \frac{m}{a}=\frac{n}{b}=\alpha+\frac{3}{4}\beta(a^2+b^2)$$

ou

$$(141)\qquad \frac{\mathrm{AC}\left(\frac{1}{\mathrm{C}}-\mathrm{L}\omega^2\right)}{-\mathrm{AR}}=\frac{\mathrm{ACR}\omega}{-\mathrm{A}(\mathrm{L}+\mathrm{KM})}=\alpha+\frac{3}{4}\beta\mathrm{A}^2[\mathrm{R}^2+(\mathrm{L}+\mathrm{KM})^2\omega^2].$$

La première équation montre que ω conserve la même valeur que lorsque le coefficient β est nul. Ensuite A est déterminé par l'équation

$$(142)\qquad \frac{3}{4}\beta[\mathrm{R}^2+(\mathrm{L}+\mathrm{KM})^2\omega^2]\mathrm{A}^2=\frac{\mathrm{CR}}{-(\mathrm{L}+\mathrm{KM})},$$

M. Blondel a traité le premier la plupart des problèmes que nous venons d'examiner en se plaçant dans des cas plus généraux. Ses articles ont été publiés dans le *Journal de Physique*, la *R. G. E.* et les premiers numéros de la *Radio-Électricité*. Je me suis inspiré aussi des travaux de M. Gutton. Enfin, pendant la guerre, je crois avoir été le premier à faire remarquer que, pendant le fonctionnement de la lampe, le point (j, u) décrivait une ellipse et non la caractéristique statique. Les réseaux de courbes tracés alors par Vallauri montrent nettement pour l'audion générateur l'influence de la courbure des caractéristiques.

Conclusions.

Il y a entre l'audion générateur d'oscillations et le pendule de l'horloge Féry-Brillié une différence très importante.

Digitized by Google

Dans le pendule, le mouvement naturel va en mourant et il est ranimé par des chocs.

Dans l'audion, le mouvement naturel croîtrait au delà de toutes limites, si l'amplitude ne faisait entrer le point figuratif (u, j) dans des régions qui correspondent à un freinage énergique, et c'est ce freinage qui maintient l'oscillation dans des limites déterminées. Pendant cette période le mouvement est amorti et l'équilibre s'établit entre les gains d'amplitude réalisés pendant que l'exposant d'amortissement est positif et les pertes subies pendant que l'exposant devient négatif.

Dans le pendule, la première période se réduit à la durée infiniment courte du choc.

L'analogie avec le problème électrique n'est donc pas complète, cependant cette analogie indique bien la phase du mouvement pendant laquelle doit agir la bobine d'entretien.

Les analogies les plus intimes entre les problèmes électriques et mécaniques ont, au contraire, été mises en évidence par un grand nombre de phénomènes. En particulier, il y a entre les lignes de courant électrique et les flux de tourbillon en hydrodynamique les plus grandes ressemblances.

Ces ressemblances sont si grandes que l'on peut se demander si un modèle mécanique ne serait pas capable de représenter exactement les phénomènes électriques.

Cela est très possible, toutes les fois que l'on n'a pas affaire à des phénomènes de rayonnement et il est possible de trouver des équipages de roues qui soient régis par des équations tout à fait analogues à celles qui gouvernent les intensités des courants de deux circuits, susceptibles de réagir l'un sur l'autre par induction mutuelle.

L'énergie cinétique des rouages devra avoir la même expression que l'énergie magnétique des solénoïdes et l'énergie potentielle des ressorts qui agiront sur les roues devra avoir la même expression que l'énergie potentielle des condensateurs.

J'ai indiqué moi-même un modèle satisfaisant théoriquement à ces conditions.

Mais, d'une façon générale, il n'est pas possible d'avoir des phénomènes électriques une explication purement mécanique. La raison en est devenue évidente aujourd'hui, grâce au progrès qui a été amené, par le principe de relativité, dans les conceptions modernes.

Digitized by Google

Et, en effet, les lois des phénomènes mécaniques demeurent les mêmes pour deux observateurs animés, l'un par rapport à l'autre, d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme; tandis que les lois des phénomènes électriques ne conservent la même forme que si les équations subissent la transformation de Lorentz, laquelle implique un changement du temps corrélatif du changement dans l'espace.

Il est donc clair qu'il y a incompatibilité.

Et si les équations de l'électricité sont correctes, ce sont, au contraire, les équations de la Mécanique qui ne doivent être envisagées que comme une première approximation.

Dès lors, c'est la mécanique qu'il faut s'efforcer de retoucher pour la façonner à l'image de la théorie de l'électricité. Si ces efforts réussissent, l'électricité aura rendu à la mécanique l'aide que celle-ci lui a prêtée, en fournissant des images sensibles de propriétés qui par leur nature échappaient à nos sens.

Pour préciser ce que je viens de dire au sujet des phénomènes d'induction de deux circuits l'un sur l'autre, imaginons une roue R placée de champ verticalement entre deux disques S et S′ sur lesquels elle frotte sans glisser, les deux disques S et S′ étant sollicités par des ressorts parfaits qui tendent à les ramener dans une position déterminée. Je fais abstraction de la pesanteur; mais, pour préciser les idées, je supposerai les disques S et S′ horizontaux et que leurs manchons tournent autour d'un même moyeu vertical auquel les ressorts sont fixés par une de leurs extrémités tandis que leur autre extrémité est attachée en un point (q) au disque S et un point (q') au disque S′.

Si θ et θ' sont les azimuts des points (q) et (q'), les forces élastiques de rappel agissant sur S et S′ sont $a\theta$ et $a'\theta'$ et l'énergie élastique est U :

$$U = \frac{1}{2} a \theta^2 + \frac{1}{2} a' \theta'^2.$$

Soit G le centre de la roue R, je suppose que G est maintenu à une distance constante l de l'axe vertical commun aux deux disques; soient (M) et (M′) les points par lesquels elle est en contact avec les disques S et S′ respectivement.

L'élément de la roue R qui est en (M) a la vitesse

$$l \frac{d\theta}{dt}.$$

Digitized by Google

L'élément de cette même roue qui est en (M') a la vitesse

$$l\frac{d\theta'}{dt}.$$

La vitesse V du point G est la demi-somme des vitesses des éléments M et M'; par suite, elle a pour expression

$$V=\frac{l}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}+\frac{d\theta'}{dt}\right).$$

Le plan vertical qui contient la roue R tourne autour de l'axe vertical avec une vitesse angulaire r :

$$r=\frac{V}{l}=\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}+\frac{d\theta'}{dt}\right).$$

Mais, indépendamment de cette rotation instantanée, la roue tourne autour de son moyeu. Appelons p sa vitesse de rotation autour du moyeu, c'est-à-dire de l'axe horizontal constitué par la perpendiculaire GH abaissée de G sur l'axe vertical des disques. Si l_1 est le rayon de la roue R, on a

$$p=\frac{1}{2}\frac{l}{l_1}\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{d\theta'}{dt}\right),$$

car la somme de pl_1 et de rl donne bien la vitesse $l\frac{d\theta}{dt}$ de M.

Dès lors, la force vive de la roue M est facile à évaluer en appliquant le théorème de Kœnigs. Soient A le moment d'inertie de la roue R autour de GH et C son moment d'inertie par rapport à la verticale GZ, la force vive dans le mouvement autour de G est

$$\frac{1}{2}(Ap^2+Cr^2).$$

La force vive de G, où toute la masse M serait concentrée, est

$$\frac{1}{2}MV^2.$$

Et la force vive T est donnée par l'expression

$$2T=I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+I'\left(\frac{d\theta'}{dt}\right)^2+\left(M+\frac{C}{l_1^2}\right)l^2\left(\frac{\frac{d\theta}{dt}+\frac{d\theta'}{dt}}{2}\right)^2+A\left(\frac{\frac{d\theta}{dt}-\frac{d\theta'}{dt}}{2}\right)^2;$$

en appelant I et I' les moments d'inertie des disques S et S'.

Digitized by Google

Cette expression est de la forme

$$T = \alpha\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2\beta\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta'}{dt} + \gamma\left(\frac{d\theta'}{dt}\right)^2,$$

les coefficients α, β, γ étant des constantes parmi lesquelles le coefficient β peut suivant les cas être positif ou négatif.

On voit donc bien que l'énergie potentielle et l'énergie cinétique ont des expressions tout à fait identiques à celles d'un système de deux circuits accouplés par induction, à la condition de faire correspondre aux quantités d'électricité qui chargent les condensateurs les angles dont les disques ont tourné.

L'énergie élastique est l'image de l'énergie électrostatique des condensateurs.

L'énergie cinétique est l'image de l'énergie magnétique due au flux d'induction qui traverse les bobines.

Ce sont des combinaisons des moments d'inertie de nos trois roues qui jouent le rôle des coefficients d'induction.

Ce sont les raideurs des ressorts qui jouent le rôle des capacités des condensateurs.

L'analogie est donc complète.

Digitized by Google

THÉORIE DE MOUVEMENT OSCILLATOIRE

DU

CADRE GALVANOMÉTRIQUE FONCTIONNANT EN SONNERIE.

Généralités. Conditions d'entretien des oscillations.

Pour qu'un régime oscillatoire soit stable, il faut que si l'on modifie très légèrement les conditions initiales, le système tende à revenir au même régime.

Ces conditions ne paraissent pas réalisées, si le mouvement est régi par des équations différentielles linéaires sans second membre, parce que la solution est une fonction linéaire et homogène des constantes arbitraires qui caractérisent l'état initial.

Supposons une équation à second membre

$$L\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{C}x = E.$$

Je dirai que E est une fonction d'entretien, si toutes les fois qu'elle n'est pas nulle, elle est du signe de $\frac{dx}{dt}$.

Je vais montrer qu'alors il n'y a pas de mouvement périodique possible. Car, en multipliant par $\frac{dx}{dt}$ et intégrant, j'aurai pour une période

$$\left[\frac{1}{2}L\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2C}x^2\right]_0^T = \int_0^T E\frac{dx}{dt}\,dt.$$

Or, en vertu de la périodicité, le premier membre serait nul, tandis que le second est essentiellement positif.

Nous avons vu différents cas d'entretien. Il y avait toujours alors un amortissement.

Dans le cas du pendule, l'amortissement est dû à la résistance de l'air.

Digitized by Google

Dans le cas de l'audion, il est dû à la résistance ohmique des circuits.

Je vais examiner un cas où l'amortissement est dû aux forces contre-électromotrices engendrées par le mouvement.

Considérons le cadre mobile d'un galvanomètre Deprez-d'Arsonval. Supposons le galvanomètre relié à une pile et soient i le courant permanent qui tendrait à s'établir, α la déviation correspondante.

Mais imaginons que le cadre mobile porte un petit ressort qui mette la pile en court circuit dès que la déviation devient supérieure à une valeur α_0 inférieure à α.

La déviation du cadre ne peut être inférieure à α_0 puisque l'équilibre correspond à $\alpha > \alpha_0$; elle ne peut non plus s'arrêter à un angle supérieur, car alors l'équilibre correspond à $\alpha = 0$, aucune source n'agissant plus sur le circuit. Donc le mouvement devra être perpétuel.

Comment ce problème peut-il être mis en équation?

On supposera le problème résolu.

Alors, la période du mouvement étant T, la force électromotrice de la pile sera égale à E_0, pour une durée t_1, à partir de l'origine de chaque période et elle sera égale à zéro pour la durée restante $T - t_1$.

Si cette commutation était effectuée à la main, il en résulterait effectivement, pourvu que E_0 fût compris entre certaines limites, un régime périodique tel que la déviation serait α_1 au début de la durée t_1 et α_2 à la fin de cette durée.

Nous supposons ici que nous avons réglé la vis de butée de façon que la commutation se fasse pour une déviation α_0.

Donc, α_1 et α_2 étant déterminés en fonction de t_1 et T, nous aurons à écrire

$$\alpha_1 = \alpha_0, \qquad \alpha_2 = \alpha_0.$$

Et ces deux équations transcendantes nous donneront t_1 et T.

Le problème est alors résolu.

Entrons un peu plus dans le calcul.

Soient :

α l'angle de déviation;
$C\alpha$ le couple directeur;
I le moment d'inertie du cadre;

Digitized by Google

h l'intensité du champ magnétique de l'aimant permanent entre les branches duquel le cadre se meut;

s la surface d'une spire de la bobine mobile;

n le nombre de tours de la bobine;

i l'intensité du courant;

R la résistance du circuit;

E_0 la force électromotrice de la source, dont la résistance intérieure est supposée négligeable;

E une fonction égale à E_0 pour $t > 0$ et $< t_1$ et à zéro pour $t > t_1$ et $< T - t_1$, d'ailleurs périodique de période T.

J'aurai pour le mouvement du cadre

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -C\alpha + nshi$$

et, pour le mouvement d'électricité, en tenant compte de la force contre-électromotrice induite par le mouvement du cadre,

$$Ri = E - nhs\frac{d\alpha}{dt}.$$

Si je pose

$$F(\varphi) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\sin m\varphi}{m} \qquad (m \text{ entier}),$$

je pourrai écrire, comme on le verra dans la Note ci-après :

$$E = E_0\left(\frac{t_1}{T} + \frac{1}{\pi}\left[F\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - F\left(\frac{2\pi(t-t_1)}{T}\right)\right]\right).$$

Or l'équation obtenue par l'élimination de i est

$$I\alpha'' + \frac{(nsh)^2}{R}\alpha' + C\alpha = \frac{nsh}{R}E.$$

Si nous réduisions le second membre à $\sin m\omega t$, la solution serait

$$\alpha = A_m \sin(m\omega t - \varphi_m),$$

à la condition de déterminer A_m et φ_m par les équations

$$A_m(-Im^2\omega^2 + C) = \cos\varphi_m,$$

$$A_m(nsh)^2\frac{m\omega}{R} = \sin\varphi_m.$$

Digitized by Google

Comme les deux fonctions F sont des sommes de termes de ce genre, $\sin m\omega(t-t_1)$ pouvant être traité comme $\sin m\omega t$, on voit qu'on peut facilement écrire l'expression finale de α.

On aura, pour α une série de Fourier, dont les coefficients sont fonctions de ω et de t_1.

Les deux séries qu'on obtient en faisant $t=0$ ou $t=t_1$ étant désignées par α_1 et α_2, les deux inconnues ω et t_1 résulteront de la résolution des deux équations transcendantes

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = 0.$$

Note. — L'expression donnée ci-dessus pour E résulte des remarques suivantes :

1° L'intégration

$$\int_0^z \frac{du}{1+u} = \log(1+z)$$

montre, en développant le premier membre en série, que l'on a

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots$$

pour toutes les valeurs de z de module inférieur ou égal à un, la valeur $z=-1$ seule exceptée.

Je pose

$$z = e^{i\varphi}$$

d'où

$$1 + e^{i\varphi} = 2\cos\frac{\varphi}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}}$$

et

$$\log(1+e^{i\varphi}) = \log\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right) + i\frac{\varphi}{2}$$

et j'en déduis, pour les valeurs de φ satisfaisant aux inégalités

$$-\pi < \varphi < +\pi,$$

que l'on a

$$\frac{\varphi}{2} = \sin\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} + \dots$$

et, en changeant φ en $\pi-\varphi$, que, pour les valeurs de φ satisfaisant aux conditions

$$0 < \varphi < 2\pi,$$

Digitized by Google

on a

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} = \sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} + \ldots$$

Dès lors, en se reportant à l'expression

$$\frac{E}{E_0} = \frac{t_1}{T} + \frac{1}{\pi}\left(F\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - F\left[\frac{2\pi}{T}(t - t_1)\right]\right),$$

on peut voir que cette expression est justifiée parce que E reste constant si t varie de dt, à moins que l'intervalle dt ne comprenne à son intérieur les époques $t = 0$ ou $t = t_1$, auquel cas E augmente ou diminue de E et qu'enfin, pour t infiniment petit, on a bien $E = E_0$.

FIN.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Pages

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I.

THÉORIE MÉCANIQUE DU DÉPLACEMENT DE MAXWELL.

Théorie de Maxwell : Théorie du déplacement électrique, la divergence 3
Expression analytique de la théorie du déplacement 6
Remarque sur les changements de coordonnées 7
Quantité d'électricité 12
Potentiel 14
Courant 15
Cas des courants ouverts 17
Le rotationnel 19
Interprétation du rotationnel et de la divergence 22
Remarque de Maxwell 24
Vecteur tourbillon 25
Remarque au point de vue dynamique 26
Définition de la divergence indépendante de la considération d'un système de coordonnées 27
Définition du rationnel indépendant de la considération d'un système de coordonnées 27
Théorie de l'induction de Maxwell 28
Étude du champ électromagnétique 30
Équations du champ électrodynamique 34
Nature polaire du vecteur électrique, axiale du vecteur magnétique 34
Expression de l'énergie électrocinétique 36

CHAPITRE II.

PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

Application du principe des vitesses virtuelles 39
Équations de Kirchhoff 41
Analogie mécanique des équations de Kirchhoff 42
Autre analogie avec la théorie des impulsions 43
Quantité de mouvement électromagnétique 45
Énergie perdue pendant le choc 48
Modification d'un réseau de Kirchhoff 48
Variation d'énergie par suppression d'une branche 49

Digitized by Google

CHAPITRE III.

ANALOGIE HYDRODYNAMIQUE.

Pages.
Analogies hydrodynamiques de l'électrostatique : sphères pulsantes de Bjerknès.. 52
Sphères pulsantes de Bjerknès (résumé)..... 60

CHAPITRE IV.

OSCILLATIONS ET COORDONNÉES NORMALES.

Oscillations électriques..... 64
Remarques sur les coordonnées normales..... 68
Exemples de liaisons..... 68
Champ de valabilité des équations..... 69
Systèmes ayant des coordonnées cachées..... 71
Méthode pour la réduction à des coordonnées normales..... 73
Oscillations dans les systèmes non conservatifs..... 76
Bélier hydraulique..... 84
Utilité des coordonnées normales..... 87

CHAPITRE V.

ANTENNE ET CONDUITE HYDRAULIQUE.

Analogie de l'antenne et de la corde vibrante..... 89
Oscillations dans un coup de bélier hydraulique..... 92
Vecteur à n composantes..... 101
Systèmes conservatifs et systèmes non isolés..... 103
Énergie dynamique et régulateur à force centrifuge..... 103
Signe des réactions..... 104

CHAPITRE VI.

GÉNÉRATION DES OSCILLATIONS.

Lignes de flux d'induction électrostatique et lignes de courant..... 105
Équation caractéristique de la lampe à trois électrodes..... 106
Génération des oscillations; horloge..... 106
Horloge Féry-Brillié..... 107
Théorie de l'entretien des oscillations..... 110
Entretien des oscillations par l'audion..... 118
Modification de l'exposant d'amortissement et de la pseudo-période..... 119
Cas particulier; auto-entretien..... 120
Régime éolien..... 121
Énergie consommée dans la lampe..... 122
Sens à donner à la force électromotrice d'entretien..... 123
Étude algébrique de l'équation caractéristique..... 125
Audion générateur d'oscillations..... 128
Discussion de l'équation qui détermine les pulsations..... 135
Détermination de l'amplitude..... 136
Conclusion..... 139

THÉORIE DU MOUVEMENT OSCILLATOIRE du cadre galvanométrique fonctionnant en sonnerie. Généralités. Conditions d'entretien des oscillations..... 144

Digitized by Google

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
Quai des Grands-Augustins, 55.

65493-21

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Princeton University Library
32101 062251127

Digitized by Google